UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

Introdução do conceito de limite de uma função pelo método gráfico com auxílio do computador

Dissertação

Constância António Devesse

Dissertação apresentada em cumprimento dos requisitos parciais para a obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências Naturais e Matemática

Maputo, Agosto de 2005

O supervisor: **Prof. Doutor Marcos Cherinda**

Docente da Universidade Pedagógica

A co-supervisora: **dr[a] Danielle Huillet**

Docente da Universidade Eduardo Mondlane

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais António Saldanha e Terezinha Alforma, que desde os primeiros momentos da minha vida se esforçaram para que eu tivesse uma boa educação e tornar-me aquilo que hoje sou. Ao meu marido Tiago, que incansavelmente me apoiou nos meus estudos; aos meus filhos, Lars, Berta, Ester, Eunice e Tiago Guilherme Devesse Júnior, para que estudem e atinjam um nível académico superior ao da sua mãe.

Dedico-o também à minha falecida tia-Zaidina, que sempre me aconselhou a estudar para que eu pudesse ultrapassar certas dificuldades da vida.

Constância António Devesse

Agradecimentos

O meu agradecimento vão em primeiro lugar aos meus supervisores Marcos Cherinda e Danielle Huillet, equipa profissional competente, simpática e acima de tudo paciente.
Aos professores e alunos das escola Kitabu, Francisco Manyanga, Josina Machel, Alvorada e Polana, que foram incansáveis ao longo de todo o trabalho de recolha de dados para esta pesquisa, o meu sincero agradecimento pelo esforço despendido e a minha admiração pessoal pela capacidade inesgotável de trabalho.
À minha família agradeço pelo apoio que me tem dado.
Este trabalho de pesquisa foi possível graças à colaboração quer directa quer indirecta de várias pessoas (professores, alunos, instituições envolvidas e pessoas singulares) às quais aproveito aqui endereçar os meus agradecimentos.

Constância António Devesse

Declaração de honra

Declaro que este trabalho é resultado da minha própria investigação, não tendo sido submetido para outro grau que não seja a tese de Mestrado em Ciências Naturais e Matemática, na Faculdade de Educação da Universidade Eduardo Mondlane.

Constância António Devesse

Lista de siglas e abreviaturas

MINED – Ministério da Educação

MathGV – "Mathematics Greg Van Mullem". Programa para se fazer gráficos a partir de funções elementares.

ESG2 – Ensino Secundário Geral do Segundo Ciclo

Lista de figuras

Lista de tabelas

Sumário

A generalidade dos alunos não possui uma ideia correcta do conceito de limite de uma função por este ser muito abstracto e de difícil compreensão.

O presente trabalho aborda a importância de introduzir o conceito de limite de uma função pelo método gráfico usando o computador. Para tal foram estudadas as actuais formas de introdução do conceito nas escolas secundárias moçambicanas, começando com a análise dos conteúdos curriculares sobre limites do programa de Matemática da 12ª classe e confrontando esta informação com a informação obtida da análise dos cadernos de alguns alunos e dos questionários preenchidos por alguns professores de certas escolas secundárias moçambicanas da cidade de Maputo. Esta triangulação de informação permitiu descobrir que alternativas de introdução do conceito de limite de uma função são usadas nestas escolas e, por conseguinte, depreendeu-se que o método gráfico devia merecer maior atenção e então decidiu-se elaborar um plano de lição em que o conceito de limite de uma função seria introduzido através deste método com a ajuda do computador, com o objectivo de ensinar o aluno a ler limites de funções no gráfico e melhorar a aprendizagem. A implementação do plano de lição mostrou que os alunos ficaram muito entusiasmados em querer aprender limites através do computador. Ao longo da aula observou-se que esta curiosidade incidia mais na aprendizagem da sintaxe do programa do computador (como definir no computador as expressões analíticas das funções dadas e obter os respectivos gráficos) do que na aprendizagem de leitura de limites nos gráficos visualizados. Contudo, a sequência das actividades preconizadas no plano de aula, que os alunos tinham que realizar, permitiu que fizessem todas as actividades previstas e depois realizassem aquelas que eram da sua iniciativa, o que não seria possível sem o auxílio do computador. Depois da aula, foram entrevistados nove alunos do mesmo nível de ensino, sendo que quatro participaram na aula experimental e cinco, duma outra escola secundária, não participaram. O resultado da análise das entrevistas mostrou não haver evidências de melhoria de aprendizagem do conceito de limite de uma função em relação aos alunos que não participaram na aula experimental.

ÍNDICE

Conteúdo **Página**

Capítulo I - Introdução

O conceito de limite de uma função é abstracto e tem sido objecto de estudo de muitos cientistas e pesquisadores. Em Moçambique há pesquisas feitas nesta área como por exemplo, o trabalho de Huillet & Mutemba (1999), que aborda a relação institucional do Ensino Secundário Geral com este conceito, o trabalho de Huillet & Mutemba (2000), que analisa as concepções de alguns professores de Matemática sobre o conceito de limite de uma função e o seu ensino nas escolas.

O presente trabalho faz uma abordagem da introdução do conceito de limite de uma função pelo método gráfico usando o computador nas escolas moçambicanas e de outras alternativas possíveis de introdução deste conceito, o qual começa a ser estudado pela primeira vez na 12ª classe do Ensino Secundário Geral, no fim do segundo semestre.

1.1 Identificação do problema

Os alunos apresentam dificuldades de compreensão do conceito de limite de uma função (Tall, 1992). Este problema já vem sendo pesquisado, mas ainda não tem uma solução satisfatória. Estudos feitos em Moçambique por alguns pesquisadores moçambicanos, por exemplo Huillet & Mutemba (1999), confirmam que o ensino deste conceito nas escolas moçambicanas é também difícil. Ainda não existe um livro oficial para o ensino de limites de funções elaborado segundo o programa curricular de Matemática da 12ª classe vigente nas escolas moçambicanas. Os alunos dependem dos apontamentos que os professores lhes dão na sala de aula, conduzindo a problemas de compreensão do conceito de limite de uma função pelos alunos.

1.2 Contexto

Contexto Local

O aluno, geralmente, vai à escola munido da experiência do seu dia-a-dia. A aquisição de novos conhecimentos pelo aluno na sala de aula baseia-se não só nas suas experiências e conhecimentos prévios mas também no desenvolvimento pessoal do mesmo aluno.

Sobre o ensino de limites no Ensino Secundário, Huillet & Mutemba (1999) afirmam que os livros que as escolas secundárias moçambicanas vinham usando desde a década de 80 até meados da década de 90 eram manuais elaborados com vista a contornar o problema de falta de livros nessa época, em que o quadro predominante era o quadro algébrico. Os alunos que estudaram através desses manuais aprenderam a resolver exercícios ou problemas de limites de funções com base na aplicação directa de fórmulas matemáticas (pensamento dedutivo). Este método de ensino do conceito de limite reflecte a alternativa de ensino deste conceito mais usada em Moçambique.

A pesquisa analisou o programa de Matemática, os cadernos de alguns alunos e fez uma consulta aos professores da 12ª classe do Ensino Secundário Geral do Segundo Ciclo (ESG2) para se entender como este conceito era introduzido na sala de aula.

1.2.1 Análise do programa

O conceito de limite começa a ser introduzido na unidade didáctica "SUCESSÕES" do programa de Matemática da 12ª classe do ESG2. Nas orientações metodológicas desta unidade recomenda-se que

> "*o professor deve fazer os possíveis para que os alunos compreendam a noção de limite duma sucessão e não se limitem a memorizar a definição que em geral eles não sabem explicar. Para tal, a representação gráfica é muito útil e esclarecedora e serve para criar a noção intuitiva de limite*" (MINED, 1997, p.31).

Contudo, o programa não faz menção desta definição de limite de uma sucessão que os alunos não sabem explicar.

Os conteúdos da unidade didáctica "LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES" preconizam o seguinte como orientação pedagógica:

> "*O professor deve tentar primeiro dar uma ideia intuitiva deste conceito e a seguir tentar construir com base nesta ideia inicial, a definição propriamente. Não tem qualquer sentido exigir que os alunos memorizem a definição sem entenderem o que estão a dizer. Para chegar à definição, pode-se tomar uma função qualquer, constituir uma sucessão de valores de x tendente para um certo valor a e verificar que a esta sucessão corresponde uma sucessão de valores de f(x) tendente para um certo b. Neste caso, b será o limite de f(x) quando x tender para a*" (MINED, 1997, p.32)

Desta citação, está claro que nas escolas moçambicanas a definição formal de limite de uma função deve ser dada a partir de uma ideia intuitiva do conceito. Este programa de ensino também preconiza, como objectivos específicos de ensino de limites, o seguinte:

"*O aluno deve ser capaz de:*

- *explicar a noção de limite duma função*;

- *definir o limite duma função f(x) quando* $x \to a$ *sendo a um valor finito e quando* $x \to \infty$;
- *determinar o limite duma função nos dois casos indicados no objectivo anterior;*
- *explicar e aplicar as regras das operações com limites de funções;*
- *identificar as formas indeterminadas de limite de funções;*
- *levantar as indeterminações;*
- *calcular limites laterais;*
- *identificar, justificar e aplicar os limites notáveis:*

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$" (MINED, 1997, p. 31).

Sobre estes objectivos específicos, o programa não sugere as propriedades que devem ser ensinadas, que regras devem ser aplicadas para o cálculo de limites notáveis bem como para o levantamento de indeterminações, nem se refere à leitura de limites nos gráficos.

Destes objectivos específicos, depreende-se que, depois de um professor ter ensinado a definição de limite, deve prestar maior atenção à resolução de exercícios que envolvem a aplicação de algoritmos ou regras de cálculo de limites. Sendo assim, o quadro algébrico é o privilegiado do programa.

O Colégio Kitabu, uma escola privada moçambicana, usa o mesmo programa de Matemática mas com uma dosificação diferente. Segundo a dosificação do programa de Matemática da 12ª classe deste colégio, a unidade didáctica 'Limites' é do primeiro semestre e introduz-se simultaneamente com o estudo das funções lineares. A introdução de limites é feita intuitivamente evitando, contudo, a definição formal em linguagem ε / δ. A razão apresentada por alguns professores desta escola é de que os alunos não compreendem a definição por esta ser muito difícil.

Sumarizando, o programa de Matemática das escolas moçambicanas, na unidade didáctica "Limites";, recomenda que deve ser dada a definição de limite de uma função sem contudo se especificar tal definição. Porém, o programa recomenda que a introdução seja feita intuitivamente.

1.2.2 Análise dos cadernos diários dos alunos

Os cadernos analisados foram de alunos de turmas diferentes de algumas escolas moçambicanas, nomeadamente, Escola Secundária Francisco Manyanga, Escola Secundária Josina Machel, Escola Secundária da Polana, Liceu Alvorada e Colégio Kitabu. Esses alunos prontificaram-se a ceder temporariamente os seus cadernos à pesquisadora, para efeitos desta investigação. Assim, foram recolhidos cinco cadernos dos alunos da escola secundária Francisco Manyanga, dois do curso diurno e três do curso nocturno; quatro da escola secundária Josina Machel, sendo dois do curso diurno e outros dois do curso nocturno; dois cadernos dos alunos do Liceu Alvorada; dois do Liceu Polana e três do colégio Kitabu, sendo que os alunos são de professores diferentes.

Os cadernos revelam que a introdução do conceito de limite de uma função é feita de acordo com o programa de ensino. A introdução intuitiva é feita de diferentes maneiras. Alguns cadernos mostram que a introdução é feita começando com uma ilustração gráfica enquanto que outros se limitam à definição em linguagem simbólica. Dois cadernos recolhidos na Escola Francisco Manyanga indicam que o conceito de limite é introduzido a partir duma sucessão de números naturais e finalmente é dada a definição de Weierstrasse, ou seja, ε / δ. Um caderno mostra que se recorre ao gráfico de uma função linear e termina pela notação $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

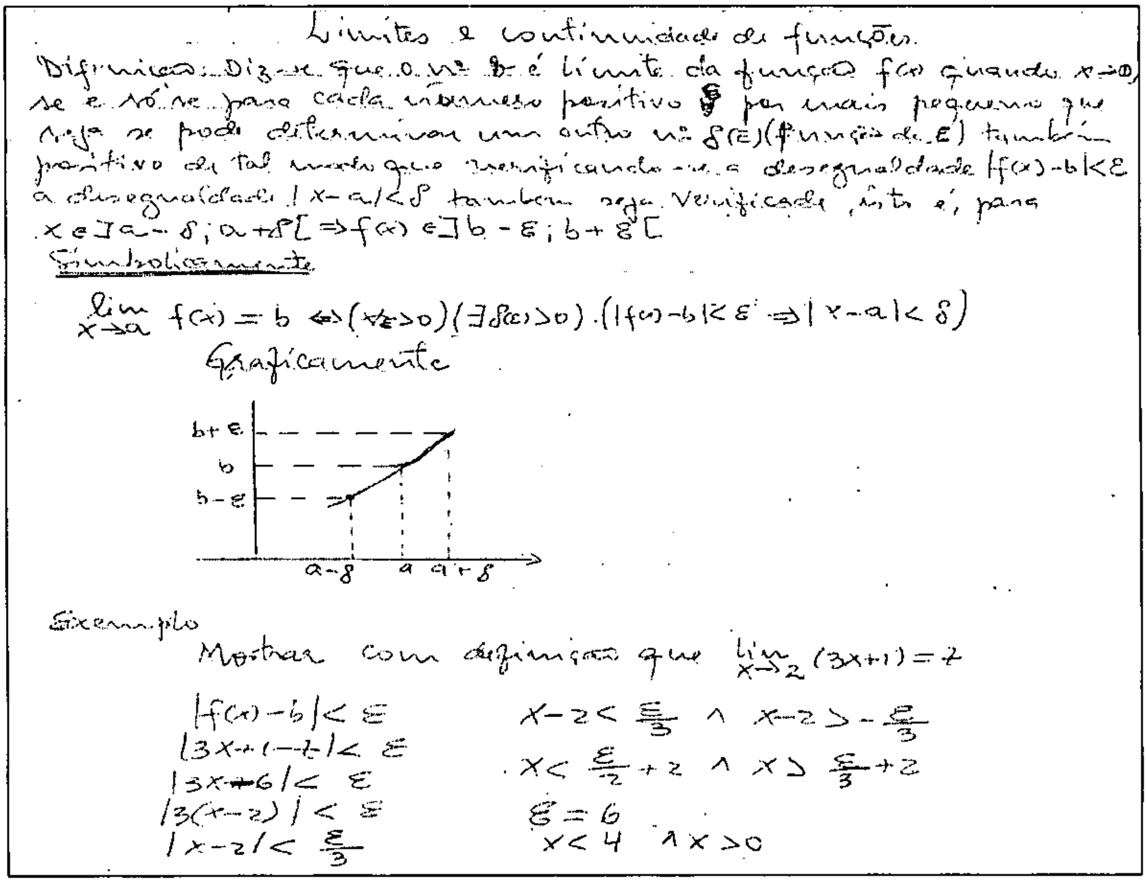
Outros dois cadernos mostram que o conceito é introduzido através de uma função quadrática, para no fim se fazer a definição de limite de uma função da seguinte maneira:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ : \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon$$

Em relação aos cadernos de alguns alunos da escola Josina Machel, dois deles apresentam a mesma forma de introdução do conceito de limite. Num caderno o conceito é introduzido através da função quadrática e utiliza o quadro numérico. Um único caderno é que mostra que se introduz o conceito de limite através da definição ε / δ.

Nos cadernos das escolas Polana e Alvorada, o conceito é introduzido como nos cadernos dos alunos das escolas acima mencionadas. O colégio Kitabu tem uma dosificação do programa diferente da dosificação em uso nas outras escolas e a introdução do conceito é feita através de uma função linear do tipo $y = ax + b$. Dos três cadernos do Colégio Kitabu, dois mostram que o conceito de limite de uma função é introduzido na altura em que se introduz o conceito de função linear. Neste caso, esboça-se o gráfico da função, faz-se o estudo tanto do comportamento como do limite da função nas extremidades da recta (para o mais infinito e para o menos infinito) e num ponto qualquer do gráfico. Um caderno deste Colégio mostra que o conceito de limite de uma função é introduzido depois da abordagem da unidade didáctica "FUNÇÕES". Segundo este caderno, a maneira de introduzir o conceito de limite assemelha-se à usada nas outras escolas secundárias moçambicanas. Entretanto, em nenhum caderno do Colégio Kitabu o conceito de limite foi introduzido a partir da definição, utilizando-se apenas os esboços de gráficos de funções lineares e, partindo da notação $\lim_{x\to a} f(x)=b$, utiliza-se o método numérico para calcular o limite.

A seguir são apresentados alguns extractos de cadernos ilustrativos das formas como o conceito de limite é introduzido nas respectivas escolas.



Limites e continuidade de funções.

Definição: Diz-se que o nº b é limite da função f(x) quando $x\to a$, se e só se para cada número positivo ε por mais pequeno que seja se pode determinar um outro nº $\delta(\varepsilon)$ (função de ε) também positivo de tal modo que verificando-se a desigualdade $|f(x)-b|<\varepsilon$ a desigualdade $|x-a|<\delta$ também seja verificada, isto é, para $x\in\,]a-\delta; a+\delta[\Rightarrow f(x)\in\,]b-\varepsilon; b+\varepsilon[$

Simbolicamente

$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0).(|f(x)-b|<\varepsilon \Rightarrow |x-a|<\delta)$

Graficamente

Exemplo

Mostrar com definição que $\lim_{x\to 2}(3x+1)=7$

$|f(x)-b|<\varepsilon$

$|3x+1-7|<\varepsilon$

$|3x-6|<\varepsilon$

$|3(x-2)|<\varepsilon$

$|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$

$x-2<\frac{\varepsilon}{3} \wedge x-2>-\frac{\varepsilon}{3}$

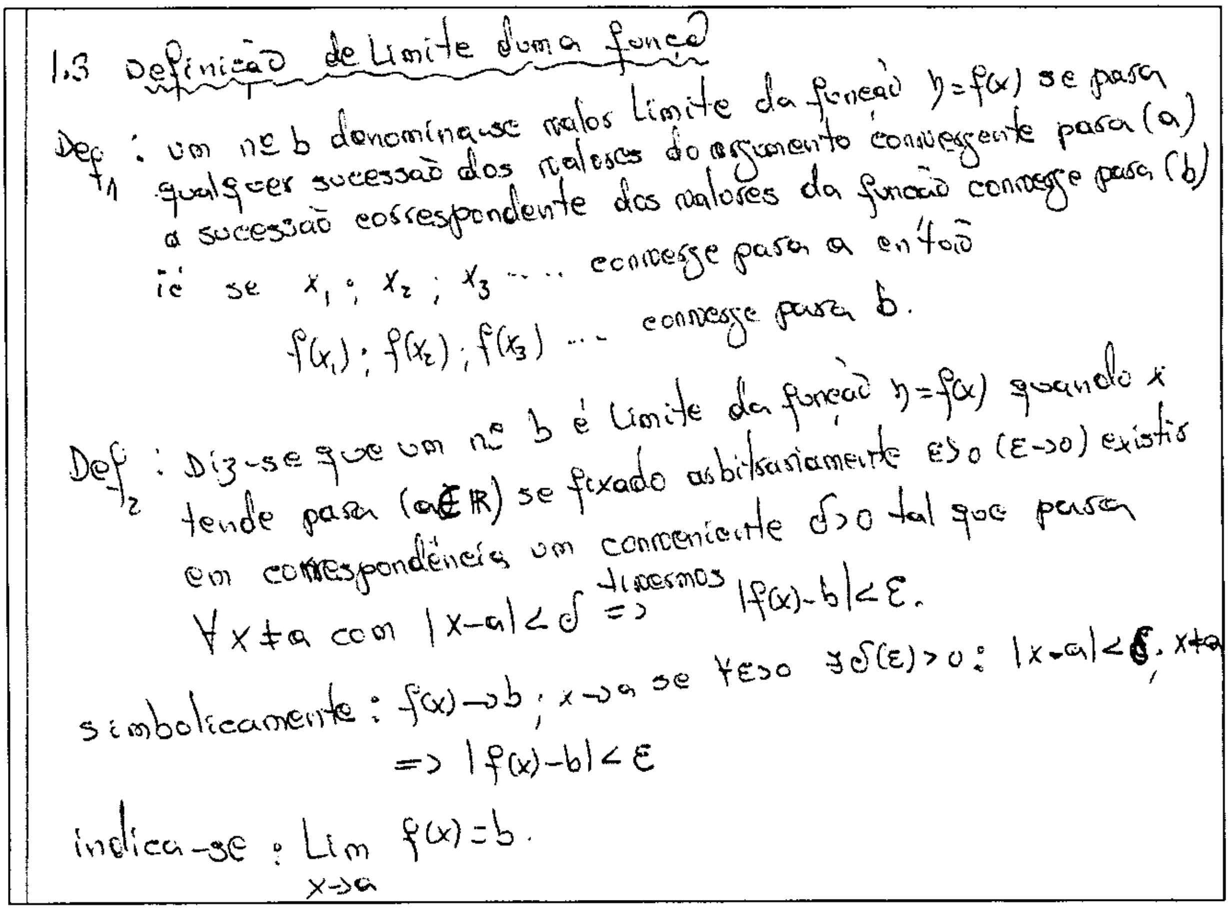
$x<\frac{\varepsilon}{2}+2 \wedge x>\frac{\varepsilon}{3}+2$

$\varepsilon=6$

$x<4 \wedge x>0$

Fig. 1.1 Introdução a partir da definição formal em linguagem ε/δ e ilustração gráfica

O conceito de limite de uma função, segundo o extracto da Fig 1.1, é introduzido utilizando a linguagem ε/δ e o gráfico de uma função *f*(*x*), exemplificando a seguir a aplicação da definição. No exemplo, não se explica o significado de $|x-a|<\delta$. A demonstração termina com a determinação do intervalo $0<x<4$ obtido a partir de $\varepsilon=6$ sem se fazer menção da implicação $|f(x)-b|<\varepsilon \Rightarrow |x-a|<\delta$, incorrectamente usada na definição de limite estabelecida na Figura 1.1. Como se vê nesta definição de limite de uma função, há ainda dificuldades em definir limite de uma função em linguagem simbólica ε/δ.


1.3 Definição de Limite duma função

Def$_1$: um nº b denomina-se valor limite da função $y=f(x)$ se para qualquer sucessão dos valores do argumento convergente para (a) a sucessão correspondente dos valores da função converge para (b)

i.e. se $x_1; x_2; x_3 \dots$ converge para a então

$f(x_1); f(x_2); f(x_3) \dots$ converge para b.

Def$_2$: Diz-se que um nº b é limite da função $y=f(x)$ quando x tende para ($a \in \mathbb{R}$) se fixado arbitrariamente $\varepsilon>0$ ($\varepsilon \to 0$) existir em correspondência um conveniente $\delta>0$ tal que para

$\forall x \neq a$ com $|x-a|<\delta \Rightarrow$ tivermos $|f(x)-b|<\varepsilon$.

simbolicamente: $f(x) \to b$; $x \to a$ se $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta(\varepsilon)>0$: $|x-a|<\delta$, $x \neq a$

$\Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$

indica-se: $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Fig. 1.2 Introdução a partir de uma sucessão de números reais e definição em linguagem ε/δ

A introdução do conceito de limite de uma função, segundo a Fig. 1.2, é feita a partir de uma sucessão usando também a linguagem ε/δ, não tendo usado nenhuma ilustração gráfica. Entretanto, verifica-se que foi estabelecida uma ligação do conceito de limite de uma função e o conceito de sucessão, que o aluno já aprendeu na unidade didáctica *Sucessões*.

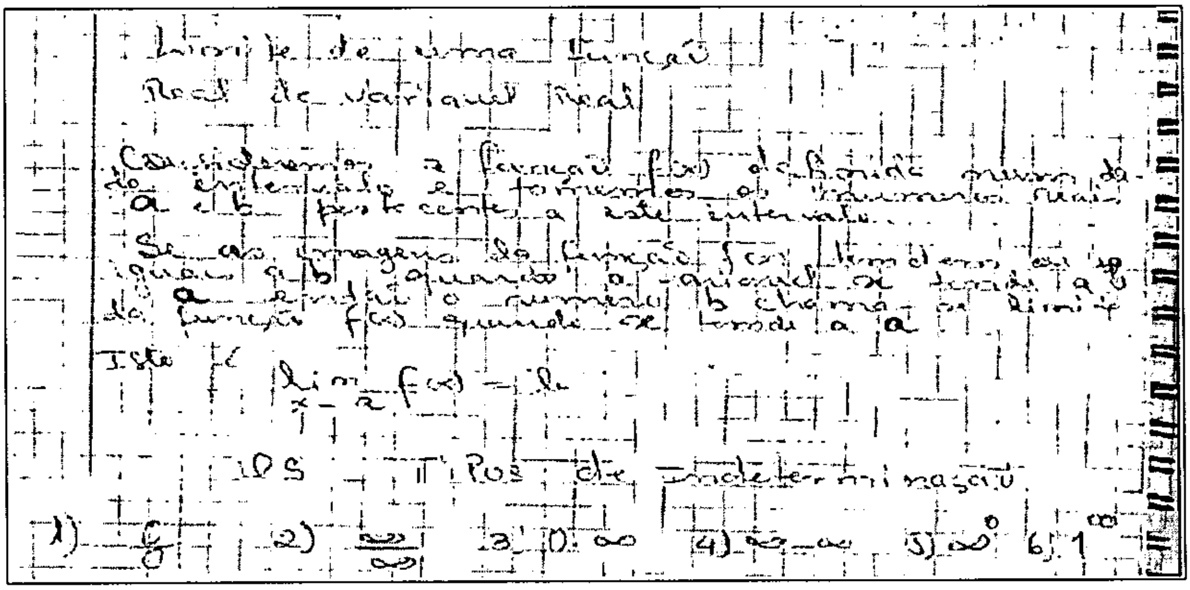


Fig. 1.3 Introdução a partir de uma definição intuitiva

Conforme a Fig. 1.3, o conceito é introduzido sem nenhuma ilustração gráfica. Escreveu-se apenas o enunciado da definição de limite de uma função não se dando nenhum exemplo de aplicação da definição, passando-se logo a seguir para tipos de indeterminação.

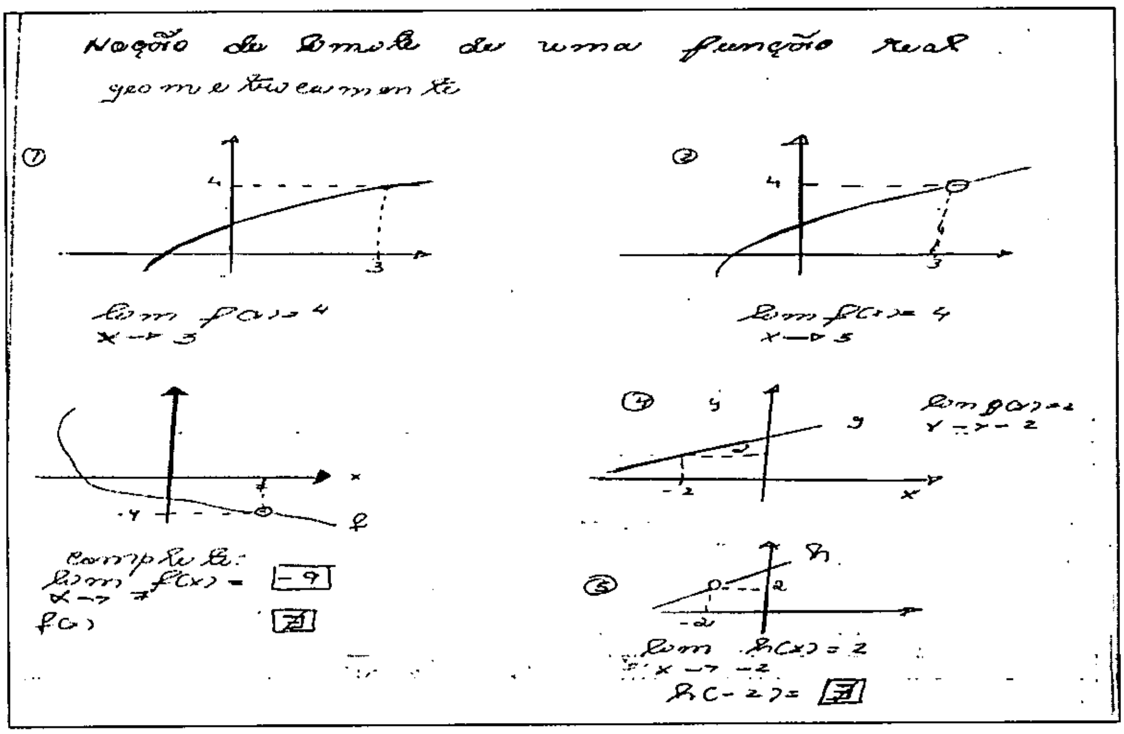


Fig. 1.4 Introdução do conceito de limite a partir de esboços de gráficos

A introdução do conceito de limite de uma função, segundo a Fig. 1.4, é feita a partir de ilustração de esboços de vários gráficos. Nesta figura pode-se observar também o uso incorrecto do quantificador existencial. Por exemplo, nesta figura, o segundo membro da última igualdade é um quantificador existencial. Isto mostra que na introdução do conceito de limite de uma função há também dificuldades de uso de símbolos, o que até certo ponto pode dificultar a compreensão deste conceito pelos alunos ou induzí-los a um uso incorrecto desses símbolos em ocasiões futuras ou em situações diferentes.

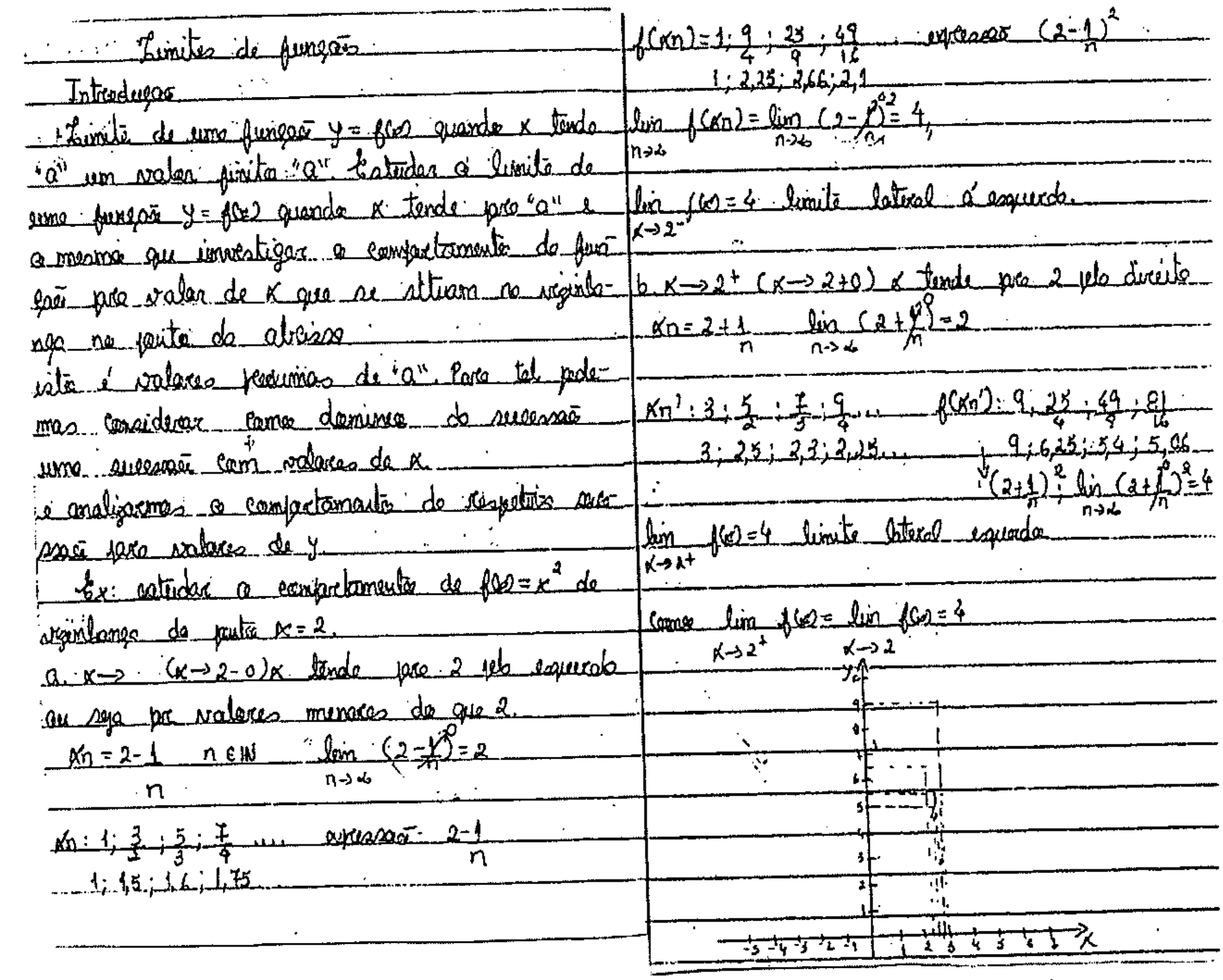


Fig. 1.5 Introdução do conceito de limite através de uma sucessão

Segundo o extracto do caderno apresentado na Fig.1.5, a introdução é feita através do termo geral de uma sucessão em que é dada uma sucessão de valores que converge para um ponto onde se pretende determinar o limite. No canto inferior direito desta figura, observa-se uma representação gráfica de alguns pontos (valores) da função $f(x) = x^2$ à direita do ponto da abcissa $x = 2$, onde se pretende calcular o limite. Não foram representadas neste gráfico as imagens dos pontos da vizinhança à esquerda do ponto dois. O gráfico não está completo e não permite perceber se os limites laterais são ou não iguais a quatro nesse ponto.

Concluindo, segundo a análise dos cadernos, o conceito de limite de uma função é introduzido de várias formas. Em alguns casos mostra-se primeiro a definição e em seguida propriedades e cálculos algébricos, noutros mostra-se primeiro a ilustração gráfica depois a definição, cálculos e suas propriedades. Nota-se também que o método gráfico usado para a introdução do conceito de limite são esboços não perfeitos e pouco ajudam à compreensão do conceito pelos alunos. Alguns cadernos mostram que depois de ter sido dada a definição de limite, que tanto pode ser em linguagem ε / δ ou somente em forma de notação $\lim_{x \to a} f(x) = b$, passa-se para o cálculo de limites de expressões algébricas incluindo o levantamento de indeterminações usando regras algébricas.

Depois de ter sido concluída a análise dos cadernos dos alunos foi feita uma consulta aos professores, com vista a obter mais informação sobre como a introdução do conceito de limite é feita nas escolas moçambicanas.

1.2.3 Consulta aos professores

A consulta foi feita através de um questionário (ver anexo I) o qual permitiu recolher opiniões e percepções dos professores sobre a introdução do conceito de limite de uma função nas escolas moçambicanas. Foi distribuído por onze professores de algumas escolas da cidade de Maputo. Consistiu de quatro grupos de perguntas, destacando-se o tipo de quadros e métodos usados na introdução do conceito.

No que concerne à informação recolhida, foi observada a ética, isto é, os dados recolhidos através do questionário não foram usados para outros fins senão para os da pesquisa.

Relativamente ao primeiro grupo de perguntas (Métodos de Introdução do conceito "limite de uma função"), em geral, nota-se o predomínio do método gráfico (dado um gráfico de uma função, determina-se, no gráfico, o limite desta função num dado ponto) e do método numérico (dada uma sucessão de valores determina-se o limite da sucessão). Todos os professores consultados afirmaram utilizar os métodos numérico e gráfico ou vice versa na introdução do conceito de limite de uma função porque facilitam a compreensão deste conceito pelos alunos, através da visualização. Por exemplo, os professores B, E e F justificaram o uso dos métodos gráfico e numérico na introdução do conceito de limite de uma função de seguinte maneira:

Professor B: "*Permite melhor compreensão e ao mesmo tempo a visualização da noção do conceito através da construção do gráfico usando a sucessão de valores de x convergentes para um certo valor a, o que corresponde a outra sucessão de valores de y tendente para um certo valor b*".

Professor E: "*A partir do gráfico previamente construído por dados da tabela, preenchida com cálculos numéricos, para valores de uma função elementar, os estudantes controlam como variam as grandezas de* $f(x)$ *à medida que varia x nas proximidades de um certo valor*".

Professor F: "*Utilizo o método gráfico e numérico, para a introdução do conceito de limite, porque a combinação de diferentes modelos é motivante e facilita a aprendizagem*".

Embora as respostas dos professores ao questionário mostrem que os métodos de introdução do conceito de limite de uma função são o numérico e o gráfico, a análise dos cadernos mostra que o método gráfico é o menos usado.

É de salientar que os cadernos dos alunos não apresentam outros gráficos senão o(s) único(s) usado(s) como exemplo no momento da introdução do conceito. Posto isto, os restantes exemplos são de cálculo de limites de expressões algébricas aplicando fórmulas ou algoritmos matemáticos.

.Na segunda pergunta, pretendia-se saber dos professores se utilizam alguma definição. Em caso afirmativo, deveriam apresentar a definição e a respectiva justificação.

Relativamente a esta pergunta, em geral, os professores, à excepção de dois da escola Kitabu, responderam afirmativamente. De facto, a análise dos cadernos dos alunos da escola onde trabalham os dois professores mostrou que o conceito de limite é introduzido partindo de exemplos concretos que envolvem a aplicação da notação $\lim_{x \to a} f(x) = b$, isto é, os valores de a e b em $\lim_{x \to a} f(x) = b$ sempre aparecem como constantes numéricas bem determinadas ou como símbolos $-\infty$, $+\infty$ ou ∞. Portanto, o que se evitou nesses cadernos foi o uso da definição ε/δ.

A seguir apresentam-se exemplos de definições dadas por três professores:

Professor A: "*Diz-se que a função f tem por limite b quando x tende para* ***a*** $(x \to a)$ *se e só se a toda sucessão* $x_1, x_2, x_3,...,x_n$ *de valores de x (distintos de* $a \in D_f$*) tendente para* ***a*** *corresponde uma sucessão* $f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)$ *tendente para* ***b****. Isto é:* $\lim_{x \to a} f(x) = b$".

Professor B: "*Um número b é limite da sucessão* $y = f(x)$ *quando x tende para* ***a*** $a \in IR$*, se fixado arbitrariamente* $\varepsilon > 0$ *existir uma correspondência ou conveniente* $\delta > 0$ *tal que para* $\forall x \neq a$ *com* $|x-a| < \delta$ *tivermos* $|f(x)-b| < \varepsilon$".

Professor C: "*Um número b denomina-se valor limite de uma função* $y = f(x)$ *se para qualquer sucessão dos valores do argumento convergente para* ***a****, a sucessão correspondente dos valores da função converge para* ***b****. O que significa que para qualquer valor* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que o* $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$."

Por falta de clareza do próprio programa, face à definição formal de limite de uma função, verifica-se a falta de uniformidade na definição deste conceito.

Na quarta pergunta, na qual os professores deviam dar exemplos de gráficos que têm usado para explicar este conceito, deram exemplos de gráficos de funções lineares, quadráticas e racionais do tipo $\frac{ax+b}{cx+d}$.

À pergunta 5, se os professores utilizavam outras formas de introdução do conceito, responderam negativamente, e um deles justificou que o programa os limitava aos métodos numérico e gráfico.

Ninguém respondeu à pergunta 6 (caso afirmativo, comparando as várias formas de introdução do conceito em qual delas é que os seus alunos aprendem com mais facilidade o conceito? E quais?). Esta pergunta é uma continuação da pergunta 5. Os professores não apresentam outras formas de introdução do conceito, senão aquelas que já mencionaram. Consequentemente não faz sentido dar resposta a esta pergunta.

Quanto à Pergunta 7, sobre o que poderia estimular a aprendizagem dos alunos, ou ajudá-los a compreender o conceito, os professores deram diferentes opiniões. Por exemplo:

Professor D: " *através do gráfico o aluno percebe melhor o conceito*"

Professor E: "*devem ser dados problemas concretos e resolvidos pelo método numérico*".

Professor G: "*Uso de um software sobre limites*".

Analisando estas respostas, depreende-se que os professores sustentam opiniões diferentes, por exemplo, o uso de ilustração gráfica, de um software de computador e resolução de problemas concretos pelo método numérico.

Se o conteúdo 'Limites' estava ou não bem ajustado no programa de ensino (pergunta 8), seis dos onze professores que responderam ao questionário afirmaram que o conteúdo tinha sido bem ajustado pela entidade que desenhou o programa, à excepção do professor F, que sugeriu que o conceito de limite de uma função deveria ser introduzido logo no primeiro semestre da 12ª classe, ao mesmo tempo que se faz a introdução do estudo de funções, e continuar o ensino deste conceito ao longo de todo o ano lectivo. Este professor pertence à escola que usa o programa com uma dosificação diferente.

Sobre se se achava indispensável ensinar o conceito de limite de uma função a partir da definição (pergunta 9), quatro professores responderam afirmativamente sustentando que a definição deveria ser aprendida pelo aluno na sala de aula, não se limitando este a cálculos algébricos de limites e à ilustração gráfica.

Três professores responderam que não era indispensável o ensino da definição de limite de uma função, porque ela é muito difícil de ser compreendida pelo aluno que ouve este conceito pela primeira vez na sala de aula, o que pode conduzir à memorização do conceito. Como exemplo, eis algumas respostas:

Professor J: " *Sim. Uma definição é sempre uma definição. É importante que os alunos saibam o que é que está por detrás do limite. Não devem calcular limites mecanicamente*".

Professor D: "*Não. Porque o conceito é muito teórico e o aluno que acaba de ingressar na 12ª classe é difícil entender*".

Professor F: "*Não. Neste nível os alunos não estão aptos a perceber a definição apenas limitam-se a memorizá-la*".

Esta divergência de opinião é reflectida nos cadernos dos alunos, uma vez que nuns o conceito de limite de uma função é introduzido a partir da definição formal enquanto que noutros é introduzido sem a definição.

No segundo grupo de perguntas (Programa de ensino), três professores responderam que esta unidade didáctica estava bem posicionada no programa.

Estes são os argumentos dados pelos professores em relação ao programa de ensino.

Professor B: "*Nesta altura os alunos possuem bases suficientes para entender o tema*".

Professor D: "*Porque os alunos estão todo o ano a tratar funções, monotonia, gráficos e problemas conducentes à funções*".

Professor E: "*No fim do 1º semestre é introduzido o conceito de limite de uma sucessão. Os alunos adquirem habilidades de cálculo, familiarizam-se com a noção de limite. No 2º semestre já estão em condições de perceber o conceito de limite de uma função*".

Estas respostas mostram que os professores concordam com a sequência dos conteúdos do programa.

Sobre a carga horária, esta é considerada muito reduzida. Esta é a opinião de alguns professores consultados.

Professor A: "*Não é suficiente. Apesar de os professores cumprirem com o programa os alunos não têm muito tempo na resolução de vários exercícios*".

Professor E: "*Não é suficiente, factor tempo. O conceito de limite é complicado e vasto, sendo assim o professor precisaria de muito tempo para fazer entender o conceito ao aluno*".

As respostas dos professores mostram que há exiguidade de tempo tanto para a exercitação como para a aprendizagem do conceito. Estas respostas confirmam a dificuldade de aprendizagem do conceito de limite pelos alunos. Os restantes três professores responderam que a carga horária é suficiente mas não comentaram nada em relação à aprendizagem do conceito. Quatro não responderam a esta pergunta.

Em relação ao terceiro grupo de perguntas (Aprendizagem do conceito "limite de uma função" pelos alunos), a maioria dos professores afirmou que o conceito não é bem percebido pelos alunos por ser muito abstracto. Os alunos não se sentem motivados com este conceito e o grau de aprendizagem é menor quando o mesmo é introduzido a partir da definição formal ε / δ.

O professor F é de opinião que a conjugação de vários métodos pode motivar os alunos e consequentemente melhorar o grau de aprendizagem do conceito de limite.

Relativamente à pergunta 2 do terceiro grupo, se os alunos sabem ou não interpretar geometrica e numericamente o limite de uma dada função, alguns professores afirmaram que os alunos não sabiam interpretar geometricamente o limite, porque estavam habituados a calcular limites aplicando as propriedades e regras algébricas.

Como comentários, três professores afirmaram que a definição formal ε / δ era muito pouco usada. Os exercícios práticos estão mais relacionados com cálculos algébricos de limites do que com a definição. Esta aparece apenas na fase em que é feita a introdução deste conceito, pelo que devia ser evitada.

No quarto grupo pedia-se aos professores que fizessem comentários adicionais. Eis o que alguns respondentes comentaram:

Professor D: "*O conceito de limite por si só é complicado e vasto. Sendo assim precisava de mais tempo para o professor conseguir recorrer a todos os métodos de ensino deste conceito*".

Professor E: "*A aprendizagem do conceito é interessante para o aluno quando lhe é dada a oportunidade de compreendê-lo graças à interpretação e análise do gráfico e do quadro numérico, deve-se no entanto ser evitada a introdução deste conceito duma forma, classicamente, expositiva*".

Professor F: "*O conceito de limite de uma função deveria ser dado no início da 12ª classe e, ir-se empregando no estudo das funções ao longo do ano. Isto ajuda o aluno a interpretar cada função mediante o seu limite. Deve ser encarado como uma componente no estudo de uma função*".

Professor H: "*Motivar os alunos na aprendizagem do conceito conduzindo-os a dar o seu ponto de vista sobre o conceito de limite*".

Em poucas palavras estes professores dão as seguintes opiniões:

- o conceito de limite deve ser introduzido partindo duma ilustração gráfica que permita o aluno compreender o conceito;
- a carga horária atribuída à unidade didáctica "limites e continuidades" é reduzida e esta deveria ser dada a partir do início do ano lectivo;
- os professores deveriam motivar os alunos com exemplos concretos dados pelos próprios alunos.

Segundo estes comentários, fica-se com a sensação de que os professores sentem que o ensino deste conceito deve ser melhorado começando pelo programa aos métodos usados pelos professores na sala de aula.

1.2.4 Confrontação

O resultado da análise dos cadernos mostra que o conceito de limite de uma função é introduzido de várias formas: quer através da definição formal ε/δ, quer através de uma sucessão, quer ainda através da notação $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Um exemplo do tipo de gráfico que os professores dizem usar na introdução do conceito são os esboços ilustrados nas figuras 5.1, 5.4 e 5.5. Após a introdução do conceito o passo seguinte, conforme os cadernos analisados, é o cálculo de limites e o levantamento de indeterminações (ver Fig. 1.3) aplicando algoritmos matemáticos. A análise dos cadernos e do questionário permite afirmar que os professores se sentem pressionados pela exiguidade de tempo disponibilizado para o ensino desta unidade, pois este conteúdo é o penúltimo do programa de Matemática da 12ª classe e dá-se numa altura em que estão próximos os exames finais, para os quais os alunos devem estar preparados.

No capítulo II vem descrito o estudo feito por Huillet & Mutemba (1999) sobre o ensino do conceito de limite em Moçambique. De acordo com este estudo as escolas secundárias em Moçambique não utilizam diferentes quadros ou a combinação desses quadros no ensino deste conceito. A análise dos cadernos diários dos alunos confirmou este facto, mostrando que os professores, apesar de introduzirem o conceito de diferentes maneiras, não usam a combinação de quadros. A complexidade do conceito de limite de uma função faz com que os alunos não compreendam o conceito. Vejamos um dos argumentos dados pelo Professor D no questionário que preencheu a respeito da complexidade do conceito:

Professor D: "*O conceito de limite por si só é complicado e vasto. Sendo assim precisava de mais tempo para o professor conseguir recorrer a todos os métodos de ensino deste conceito*".

Segundo este professor, a exiguidade do tempo é um dos factores que limitam o uso de vários quadros no ensino do conceito.

Sobre o fraco uso do método gráfico na sala de aula, Huillet & Mutemba (1999) afirmam:

> "*A ligação entre o quadro algébrico e o quadro gráfico é muito fraca. O quadro numérico é por vezes sugerido pelo programa mas não aparece como uma base sólida para a compreensão do conceito de limite. Como consequência, em Moçambique, os alunos são induzidos a aprender limites de funções pelos métodos algébricos*".

A pesquisa chegou também a este resultado através da análise dos cadernos e dos questionários.

A análise dos cadernos dos alunos, da consulta aos professores e da revisão da literatura permitiu encontrar as várias alternativas de introdução do conceito de limite de uma função usadas pelos professores na sala de aula.

Outros contextos

Dadas as dificuldades relacionadas com o ensino do conceito de limite de uma função encontradas no contexto moçambicano, a pesquisa procurou na literatura outras formas ou alternativas de introdução deste conceito. As várias de introdução do conceito de limite de uma função que este capítulo apresenta foram seleccionadas com base na análise do programa, dos cadernos dos alunos, do questionário e da revisão da literatura. Esta selecção foi feita tendo também em consideração o nível de escolaridade dos alunos da 12ª classe.

A primeira alternativa está relacionada com a recta tangente (quadro geométrico), a segunda com gráfico e intervalos (quadro gráfico), a terceira com função racional (quadro numérico), a quarta com a velocidade instantânea (quadro cinemático), e a quinta com a combinação dos quadros gráfico, numérico e definição formal.

1.3 Diferentes maneiras de introdução do conceito de limite de uma função

1.3.1 Introdução do conceito de limite através da recta tangente (quadro geométrico)

O conceito de limite pode ser introduzido a partir do conceito de tangente num determinado ponto de uma curva ou do gráfico de uma função (Ávila, 1998). Ávila considera que o declive é um limite. Assim, ele apresenta primeiro a curva de uma determinada função f em que a e $f(a)$ são as coordenadas de um ponto P dessa curva, em que se pretende traçar a tangente. Considera ainda um outro ponto Q da mesma curva, cujas coordenadas são $a+h$ e $f(a+h)$.

O declive da recta secante PQ é dado pelo quociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (ver Fig. 1.6), que ele chama de razão incremental. É razão incremental porque h é um incremento que se dá à abcissa de P para obter a abcissa de Q. Em consequência, o incremento da função é $f(a+h)-f(a)$.

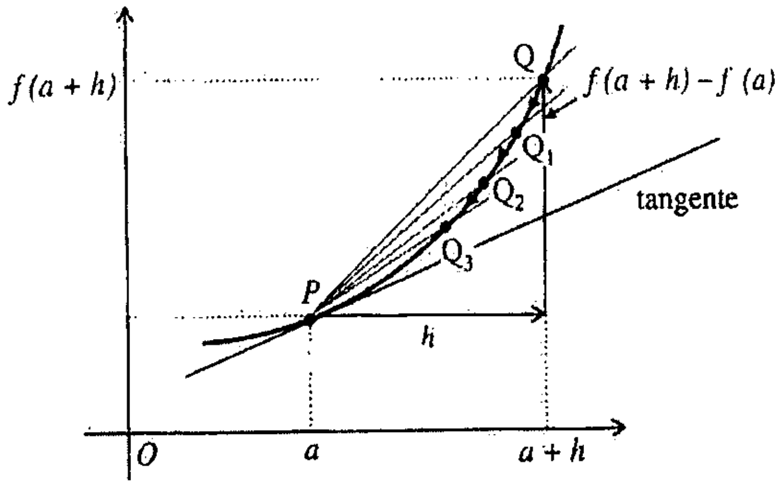


Fig. 1.6 Determinação da tangente no ponto P quando o ponto Q se aproxima de P pela direita

Ávila faz deslocar o ponto Q ao longo da curva, aproximando-o do ponto P fixo. O ponto Q aproxima-se de P passando por successivas posições Q_1, Q_2, Q_3,.... A secante PQ vai tomar as posições PQ_1, PQ_2, PQ_3,... Quando o ponto Q atingir o ponto P, o declive da recta PQ será m. O número m é também chamado declive da curva no ponto P. Acontecendo o acima descrito, Ávila afirma o seguinte: *"A recta tangente à curva no ponto P é a recta que passa por P e cujo declive ou coeficiente angular é m."* (Ávila 1998, p. 49).

O declive é um limite

Quando Q se aproxima de P, a abcissa $a+h$ aproxima-se de a e a secante PQ vai-se aproximando da tangente no ponto P. À medida que $a+h$ se aproxima de a, a diferença $h=(a+h)-a$ aproxima-se cada vez mais de zero e a inclinação da secante PQ aproxima-se da inclinação da tangente no ponto P. Quando $h = 0$, a secante PQ e a tangente no ponto P sobrepõem-se, isto é, têm a mesma inclinação ou declive (número finito m), pelo que a razão incremental $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ é o valor numérico da inclinação da recta tangente no ponto P quando h tende para zero.

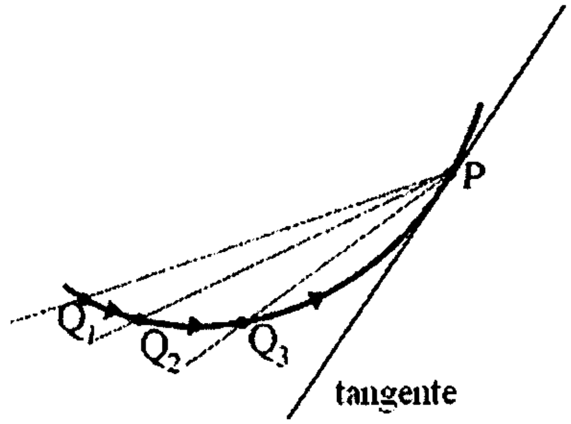


Fig.1.7 Determinação da tangente no ponto P quando o ponto Q se aproxima de P pela esquerda

Segundo Ávila (1998, p.50), "*quando* $h \to 0$ *e a razão incremental se aproxima de um valor finito m, diz-se que m é o limite da razão incremental quando h tende para zero, e escreve-se*

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

O símbolo "$\lim\limits_{h \to 0}$" *significa 'limite quando h tende para zero'.*" (p. 50)

Observação: h deve ser diferente de zero na razão incremental, porque a razão incremental não faz sentido para $h = 0$, pois ter-se-ia $\frac{0}{0}$. Como exemplo, Ávila dá o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ (ver Fig. 1.8) com a recta tangente no ponto de coordenadas (1,1). Pretende-se determinar a inclinação desta recta tangente no ponto de abcissa x=1.

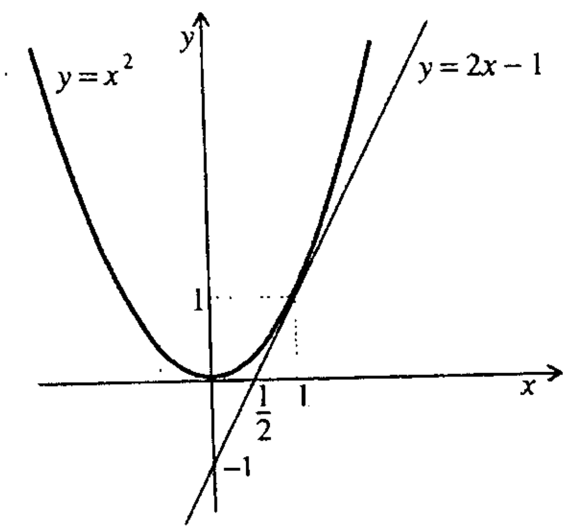


Fig. 1.8 Determinação da tangente no ponto (1,1) do gráfico $f(x) = x^2$

Temos $f(1+h)=(1+h)^2=1+2h+h^2$, o que implica:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=\frac{h(2+h)}{h}=2+h$$

A expressão $2+h$ aproxima-se do valor 2 quando $h \to 0$, de modo que se pode escrever

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2.$$

Este limite significa que a recta tangente ao gráfico no ponto de abcissa $x=1$ tem como inclinação ou declive m = 2. Portanto, o declive m da recta tangente num ponto a do gráfico de uma função f é o limite da razão incremental $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quando a diferença $h \to 0$.

Da Geometria Analítica pode-se mostrar que a expressão analítica da recta tangente no ponto $P(1,1)$ da parábola $y=x^2$ é $y=2x-1$.

Esta alternativa exige do professor uma ligação entre o conceito de declive e o conceito de limite. Para que os alunos entendam o conceito de limite através da recta tangente, é necessário que tenham a noção de declive, de recta tangente e de secante, de movimento de um ponto ao longo de uma trajectória curva e de ângulo formado por uma recta e o eixo das abcissas (ângulo negativo e ângulo positivo). É fácil introduzir o conceito de limite através da recta tangente porque os alunos já conhecem os conceitos de inclinação, declive ou coeficiente angular, as razões trigonométricas de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo e sua aplicação em problemas concretos de Física (10ª classe), quando calculam a posição de um ponto material em relação a um observador.

A introdução do conceito de limite de uma função a partir da recta tangente é vantajosa porque o conceito de derivada num dado ponto, a ser introduzido, segundo o programa da 12ª classe, depois da unidade didáctica LIMITES, poderá ser introduzido a partir dos conceitos de declive, de tangente num dado ponto ou de limite da razão incremental (quando h tende para zero). A dificuldade que pode surgir na introdução do conceito de limite a partir da recta tangente é, talvez, a abstracção que o aluno terá que fazer sobre o movimento do ponto Q ao longo da curva em direcção ao ponto P fixo (onde se pretende determinar o limite) e das diminuições em valor numérico tanto dos declives como das respectivas secantes QP (os comprimentos das secantes QP vão sendo cada vez menores tendendo para zero à medida que o ponto Q se aproxima de P).

1.3.2 Introdução do conceito de limite através de um gráfico (quadro gráfico)

O conceito de limite de uma função pode ser introduzido a partir de um gráfico em que se considera uma abcissa x_0 previamente seleccionada (Protter & Morrey, 1977).

Por exemplo, Protter & Morrey consideram o gráfico da função quadrática dada pela expressão analítica $y = f(x) = -2x^2 + 8x - 4$, $x = 3$ a abcissa de um ponto do gráfico e um intervalo que contém o 3, por exemplo [1; 4].

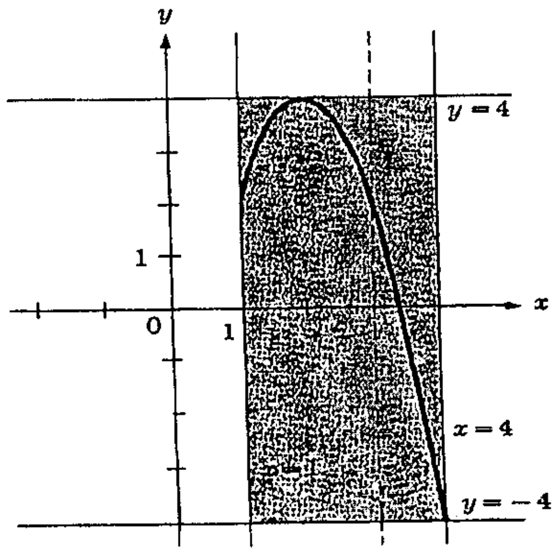


Fig. 1.9 Determinação de limite de $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$ quando $x \to 3$ através de um gráfico no intervalo [1,4]

O gráfico, neste intervalo, atinge o seu máximo no ponto em que a abcissa é $x = 2$ e a ordenada é $f(2) = 4$, e o valor mínimo para $x = 4$ quando $y = -4$ (Fig. 1.9).

A seguir reduz-se ainda o intervalo anteriormente considerado, mantendo sempre a abcissa $x = 3$ dentro do novo intervalo. Considere-se, agora, o intervalo limitado pelas rectas verticais de equação $x = 2\frac{1}{2}$ e $x = 3\frac{1}{2}$. Estas duas rectas intersectam o gráfico nos pontos cujas ordenadas são, respectivamente, $y = 3\frac{1}{2}$ e $y = -\frac{1}{2}$. A porção de gráfico compreendida neste novo intervalo está ilustrada na Fig. 1.10.

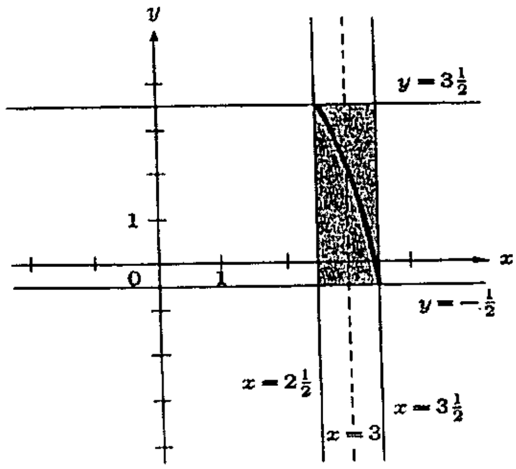


Fig. 1.10 Determinação de limite de $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$ quando $x \to 3$ através de um gráfico no intervalo [2,5; 3,5]

A Fig. 1.11 mostra a porção do gráfico quando o intervalo que contém a abcissa $x = 3$ vai de $x = 2{,}9$ a $x = 3{,}1$ onde $y = 2{,}38$ e $y = -1{,}58$ são as respectivas ordenadas.

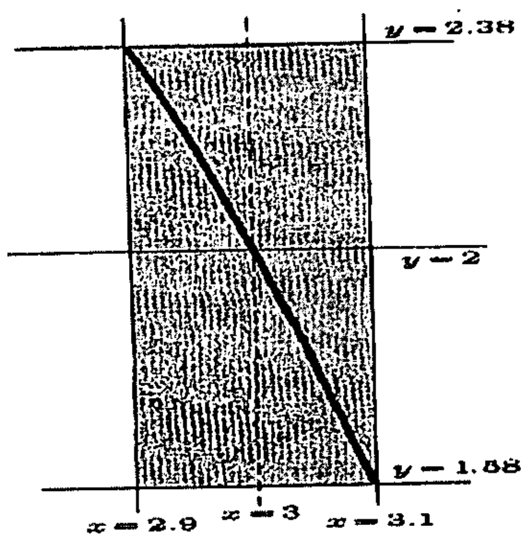


Fig. 1.11 Determinação de limite de $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$ quando $x \to 3$ através de um gráfico no intervalo [2,9; 3,1]

Verifica-se que, à medida em que a amplitude do intervalo que contém a abcissa $x = 3$ se torna cada vez menor, isto é, aproximando-se de zero, os valores da função se aproximam de um mesmo valor que, neste caso, é $y = 2$. Este valor é o limite da função $f(x)$ quando x tende para 3, e escreve-se $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$.

Generalizando, se uma função f está definida para valores de x próximos do número fixo a, e se, quando x tende para a, os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais de um número específico L, escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e lê-se: "Limite de $f(x)$ quando x tende para a é L".

Então, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que se x está muito próximo de a, $f(x)$ está próximo de L.

Esta forma de introdução do conceito de limite permite visualizar a porção do gráfico que contém o ponto de abcissa $x_0 = a$ no qual se pretende achar o limite. A diminuição do tamanho do intervalo, que contém o ponto $x_0 = a$, tanto a esquerda como a direita, é um pré-requisito para a introdução do conceito de limites laterais. Para a introdução do conceito de limite a partir desta alternativa, é recomendável que o gráfico seja simples, isto é, duma função simples, como, por exemplo, o gráfico de uma função linear, quadrática, ou cúbica. Esta alternativa permite usar valores arbitrários do domínio da função para se obter as imagens correspondentes dos extremos do novo intervalo seleccionado, o que permite analisar para que valor tendem essas imagens à medida que o tamanho de cada intervalo que contém o ponto x_0 se torna cada vez menor (tende para zero).

Esta alternativa é vantajosa uma vez que o aluno pode determinar o limite sem ter que recorrer a cálculos. As diminuições sucessivas dos intervalos que contêm o ponto de abcissa em que se pretende achar o limite conduzi-lo-ão ao valor do limite nesse ponto.

A desvantagem desta alternativa é de consumir muito tempo, uma vez que é necessário desenhar porções de gráficos e fazer cálculos. Para contornar este problema, o professor pode desenhar estas porções do gráfico em papel transparente e apresentá-las na sala de aula com auxílio de um retroprojector ou ainda, recorrendo ao cartaz, o professor pode desenhar porções de gráficos para mostrar aos alunos as sucessivas diminuições. Também pode ser usado o computador caso a escola disponha de uma sala de informática onde os alunos aprendam a trabalhar com o computador. Existem muitos programas de computador desenhados para o ensino e apredizagem de limites, no caso vertente, o programa é o MathGV. A construção de gráficos e análise de limites é muito facilitada pela rapidez de processamento que o computador oferece.

1.3.3 Introdução do conceito de limite através de uma função racional (quadro numérico)

Uma função racional é uma função do tipo $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ onde *P(x)* e *Q(x)* são expressões polinomiais e, em particular, $Q(x)\neq 0$. É importante que se recorde que o denominador de uma fracção não deve ser igual a zero. Portanto, deve-se determinar, em primeiro lugar, o domínio da expressão racional antes da determinação do seu limite. Assim, a função $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ não está definida para valores de x que anulam o denominador. Por exemplo, seja dada a função *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ (Hoffmann & Bradley, 1996). A função *f* não está definida no ponto da abcissa $x = 1$. Que valores é que esta função toma para valores de x que se encontram nas proximidades do ponto $x = 1$? Alguns valores de *f(x)* podem ser obtidos atribuindo a x alguns valores que se situam muito próximos de $x = 1$ tanto à sua esquerda como à sua direita. Os valores obtidos a partir da substituição representam o comportamento da função *f* quando "*x tende para* 1":

x	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,05	1,1
f(x)	2,8	2,9	2,95	2,99	2,999		3,001	3,01	3,05	3,10

Estes valores sugerem que $f(x)$ se aproxima do número 3 quando x *tende para* 1 de ambos os lados. Este comportamento pode ser descrito da seguinte forma: "O limite de $f(x)$ quando x tende para 1 é igual a 3". Simbolicamente temos: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$. Tais valores podem ser postos num sistema cartesiano ortogonal obtendo-se o seguinte gráfico (Fig. 1.12):

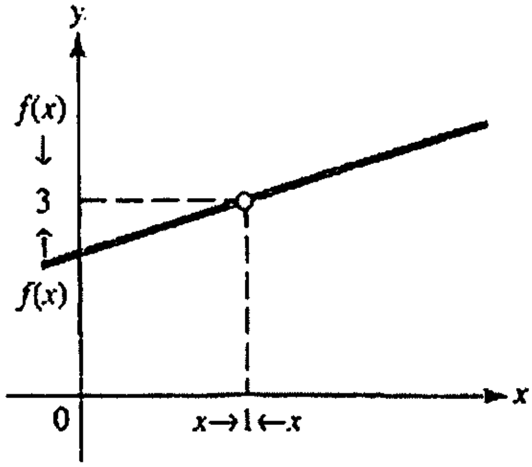


Fig. 1.12 Ilustração gráfica do limite de $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ quando $x \to 1$

O gráfico da função *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ é uma recta com um buraco no ponto (1,3) e os pontos (*x*,*y*) sobre o gráfico aproximam-se deste buraco quando *x* tende para 1 de ambos os lados.

Esta figura também mostra que ao aproximar-se *x* de 1, tanto à esquerda como à direita, os valores de *f(x)* se aproximam de 3. Este valor (três) é o limite de *f(x)* quando *x* tende para 1.

Generalizando temos: "*se f(x) se aproxima de um número* L, *quando x tende para c de ambos os lados, então,* L *é o limite de f(x) quando x tende para c. Este comportamento expressa-se escrevendo* $\lim_{x \to c} f(x) = L$." (Hoffmann & Bradley, 1996).

Nesta alternativa estuda-se, em geral, o limite da função nos pontos em que ela não está definida. Deste estudo pode-se concluir se existe ou não o limite, dependendo da existência ou não de um valor comum para o qual a função tende na vizinhança desse ponto. A representação gráfica ajuda a visualizar a posição do ponto onde se pretende determinar o limite, por um lado, e os valores na tabela permitem analisar o comportamento da função na vizinhança desse ponto, por outro lado.

1.3.4 Introdução do conceito de limite a partir da velocidade instantânea (quadro cinemático)

O conceito de limite pode ser introduzido através de uma grandeza física denominada velocidade instantânea. Para interpretar certos problemas, a Física apoia-se no conceito de limite. A Matemática é também útil na resolução de certos problemas físicos, uma vez que serve para interpretar conceitos físicos, especificamente, o conceito de velocidade instantânea. Quando o valor da velocidade de um corpo não se mantém constante, dizemos que este corpo está em movimento variado. Isto ocorre, por exemplo, com um automóvel cujo ponteiro do velocímetro indica valores diferentes a cada instante. O valor indicado no velocímetro, em um dado instante, é a velocidade instantânea do automóvel naquele momento.

Protter & Morrey (1977) introduzem o conceito de limite da seguinte maneira:

Quando o ponteiro do velocímetro de um automóvel em movimento indica 60, diz-se que o carro está a mover-se a *60 quilómetros por hora* (60 km/h). Isto significa que, se o carro continuar a mover-se exactamente da mesma maneira (à velocidade constante de 60 km), durante uma hora percorrerá exactamente 60 quilómetros. Entretanto, durante o percurso o ponteiro do velocímetro não se mantém na mesma posição, podendo indicar valores acima ou abaixo de 60, conforme o motorista vai acelerando ou travando o carro. Assim, o carro poderá ter percorrido 60 quilómetros numa hora, havendo, contudo, momentos em que a velocidade do carro foi superior ou inferior a 60 km/h.

Para simplificar a linguagem, considera-se:

1) "*o movimento do carro como sendo rectilíneo, apesar de possíveis mudanças de direcção durante o percurso. Uma das direcções é arbitrariamente escolhida como positiva e a oposta é escolhida como negativa;*

2) *o carro como sendo um ponto ou uma partícula material*" (Protter & Morrey, 1977, p. 77).

Esta simplificação facilita o tratamento matemático e a análise do movimento específico de qualquer objecto complexo em movimento, como o caso de um automóvel.

Suponhamos agora que uma partícula se move ao longo de uma linha recta *L*, da esquerda para a direita (sentido positivo), a partir do ponto *O* (ver Fig. 1.13, extraído de Protter & Morrey, 1977, p.78).

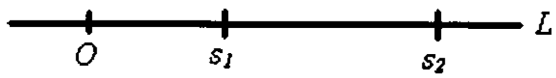


Fig. 1.13 Trajectória rectilínea de uma partícula material partindo do ponto *O* e passando pelos pontos s_1 e s_2

Designe-se por t o tempo (em segundos, minutos ou horas) e por s a distância (em centímetros, metros ou quilómetros) percorrida pela partícula.

Se a partícula em movimento estiver no ponto s_1 no instante t_1 e no ponto s_2 no instante t_2, então levou $t_2 - t_1$ unidades de tempo a percorrer a distância $s_2 - s_1$. A velocidade média percorrida pela partícula nesse intervalo de tempo é definida por $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$.

Se a distância s for medida em metros e o tempo t em segundos, a velocidade média será expressa em metros por segundo (m/s). Se o carro tiver percorrido 40 quilómetros em uma hora, a velocidade média do carro será de 40 quilómetros por hora. Contudo, neste exemplo, há pouca informação sobre a velocidade do carro em diferentes momentos do seu percurso. Durante o percurso, o ponteiro do velocímetro pode não indicar sempre 40 km/h. Portanto, a velocidade do carro varia em instantes de tempo diferentes. Para estudar a variação da velocidade em intervalos de tempo cada vez menores, marcam-se dois locais na estrada por onde o carro vai passar, mede-se com precisão a distância que separa os dois locais e, com um dispositivo de medição, determina-se o momento exacto em que o carro passa por cada um dos pontos. Daí calcula-se a velocidade média do carro. Acredita-se que, quando a distância que separa os dois pontos é pequena, a velocidade do carro não varia muito quando este percorre a distância do primeiro ao segundo ponto. Por exemplo, se a distância for de 100 metros e a velocidade média for de 60 km/h, a variação do movimento ao longo deste percurso pode não ser muito notável. Se se desejar uma precisão mais elevada, pode-se reduzir o intervalo para 10 metros e determinar a velocidade média. Se se verificar ainda que existe variação da velocidade, este intervalo pode ser reduzido para um metro. Pode-se admitir que a variação do movimento não é muito notável, pelo que a velocidade média aproxima-se da velocidade indicada pelo ponteiro do velocímetro do carro. A continuação deste processo mostra que velocidade instantânea é o resultado do cálculo da velocidade média em todo o processo de redução de intervalos.

Para tornar a discussão mais precisa, note-se que s é a distância percorrida pelo carro na sua trajectória rectilínea, f é uma função do tempo t, isto é, $s = f(t)$.

"*A velocidade média entre os tempos t_1 e t_2 é dada pela expressão* $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$. *A velocidade instantânea no instante t_1 é definida como* $\lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$" (Protter & Morrey, 1977, p. 78). Quer dizer, a velocidade instantânea é o limite da velocidade média quando o tempo de percurso tende para zero. Como t_2 deve ser diferente de t_1, pode-se escrever que $t_2 = t_1 + \Delta t$, onde Δt pode ser *positivo* ou *negativo*. A expressão de velocidade instantânea acima indicada é equivalente a $\lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_1+\Delta t)-f(t_1)}{t_1+\Delta t-t_1}$ *ou* $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_1+\Delta t)-f(t_1)}{\Delta t}$ (ver secção 2.3.1).

Esta alternativa exige uma abstracção mental no que diz respeito aos conceitos de velocidade como variação do espaço sobre variação do tempo e em relação ao conhecimento do dispositivo de contagem de velocidades de um automóvel chamado velocímetro.

A redução cada vez menor do intervalo de tempo percorrido numa distância Δs torna esta alternativa semelhante à descrita no ponto 2.3.2.

O conceito de limite é introduzido a partir de uma expressão algébrica $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quando $\Delta t \to 0$ e o veículo em movimento deve ser imaginado como uma partícula material ao mesmo tempo que se fala do ponteiro deste veículo que indica velocidades. Com a redução sucessiva do espaço percorrido, a velocidade média, como quociente entre o espaço total percorrido e o tempo total gasto em o percorrer, passa a ser interpretada como espaço percorrido num intervalo de tempo muito reduzido (num dado instante). Assim, a velocidade instantânea é o limite da velocidade média quando a variação do tempo tende para zero.

A vantagem de introduzir o conceito de limite a partir do conceito de velocidade instantânea reside no facto de os alunos já terem aprendido o conceito de velocidade instantânea na 10ª classe na disciplina de Física.

1.3.5 Combinação dos quadros na introdução do conceito de limite de uma função (quadros numérico, gráfico e formal)

A introdução do conceito de limite de uma função pode ser feita fazendo a combinação de diferentes quadros como a seguir se explica, começando pelo quadro numérico.

Iezzi et al. (1985) introduzem o conceito de limite de uma função a partir da função $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$ definida para todo x real e $x \neq 1$.

Se $x \neq 1$, podemos dividir o numerador e o denominador por $x-1$ obtendo $f(x)=2x+1$.

Estes autores estudam os valores da função f quando x assume valores próximos de 1, mas diferentes de 1. Atribuindo a x valores próximos de 1, mas menores que 1, tem-se:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
$f(x)$	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

Atribuindo a x valores próximos de 1, mas maiores que 1, tem-se:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
$f(x)$	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002

Observando ambas as tabelas, verifica-se que, quando x se aproxima cada vez mais de 1, $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 3, isto é, quanto mais x estiver próximo de 1, tanto mais próximo de 3 estará $f(x)$. Este processo conduz a aplicação da definição formal ε / δ e sua representação gráfica.

Assim na primeira tabela tem-se:

$x=0{,}9 \Rightarrow f(x)=2{,}8$ isto é, $x-1=-0{,}1 \Rightarrow f(x)-3=-0{,}2$

$x=0{,}99 \Rightarrow f(x)=2{,}98$ isto é, $x-1=-0{,}01 \Rightarrow f(x)-3=-0{,}02$

$x=0{,}999 \Rightarrow f(x)=2{,}998$ isto é, $x-1=-0{,}001 \Rightarrow f(x)-3=-0{,}002$

Na segunda tabela tem-se:

$x=1{,}1 \Rightarrow f(x)=3{,}2$ isto é $x-1=0{,}1 \Rightarrow f(x)-3=0{,}2$

$x=1{,}01 \Rightarrow f(x)=3{,}02$ isto é $x-1=0{,}01 \Rightarrow f(x)-3=0{,}02$

$x=1{,}001 \Rightarrow f(x)=3{,}002$ isto é $x-1=0{,}001 \Rightarrow f(x)-3=0{,}002$

Pelas duas tabelas verifica-se que:

$|x-1| = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad |f(x)-3| = 0{,}2$

$|x-1| = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad |f(x)-3| = 0{,}02$

$|x-1| = 0{,}001 \quad \Rightarrow \quad |f(x)-3| = 0{,}002$

Pode-se tornar *f(x)* tão próximo de 3 quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos x suficientemente próximo de 1. Isto é, podemos tornar o módulo da diferença entre $f(x)$ e 3 tão pequeno quanto desejarmos desde que tomemos o módulo da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno.

"*Note que ao falarmos de* $|f(x)-3|$ *tão pequeno quanto desejarmos e* $|x-1|$ *suficientemente pequeno, não se sabe ainda como quantificar essas tão pequenas diferenças*" (Iezzi et al., 1985, p.22).

Assim, há uma necessidade de se usar símbolos para indicar essas diferenças tão pequenas. Os símbolos que geralmente são usados são ε (epsilon) e δ (delta).

Então, dado um número positivo ε, se se desejar $|f(x)-3|$ menor que ε, deve-se tomar $|x-1|$ suficientemente pequeno, isto é,. deve-se encontrar um número positivo δ, suficientemente pequeno, de tal modo que: $0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-3| < \varepsilon$

A condição $0 < |x-1|$ é neste caso equivalente a $0 \neq |x-1|$, isto é, $x \neq 1$, porque estamos interessados nos valores de $f(x)$, quando x está mais próximo de 1, mas não para $x = 1$.

Como δ depende do ε, para as duas tabelas temos o seguinte:

- $|x-1| = 0{,}1 \Rightarrow |f(x)-3| = 0{,}2$ então se for dado $\varepsilon = 0{,}2$ tomamos $\delta = 0{,}1$ e afirmamos que $0 < |x-1| < 0{,}1 \Rightarrow |f(x)-3| < 0{,}2$
- $|x-1| = 0{,}01 \Rightarrow |f(x)-3| = 0{,}02$ então se for dado $\varepsilon = 0{,}02$ tomamos $\delta = 0{,}01$ e temos $0 < |x-1| < 0{,}01 \Rightarrow |f(x)-3| < 0{,}02$

- $|x-1| = 0{,}001 \Rightarrow |f(x)-3| = 0{,}002$ então se for dado $\varepsilon = 0{,}002$ tomamos $\delta = 0{,}001$

  e temos: $0 < |x-1| < 0{,}001 \Rightarrow |f(x)-3| < 0{,}002$

Notemos que dado ε, tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Generalizando, afirmamos que qualquer que seja o valor positivo ε, podemos tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ e teremos

$$0 < |x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$$

$$0 < |x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |2x-2| < \varepsilon \Rightarrow |(2x+1)-3| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$$

Notando que $0 < |x-1| < \delta \Leftrightarrow 1-\delta < x < 1+\delta$ e $|f(x)-3| < \varepsilon \Leftrightarrow 3-\varepsilon < f(x) < 3+\varepsilon$. Para todo x entre $1-\delta$ e $1+\delta$ e $x \neq 1$, tem-se os valores de $f(x)$ entre $3-\varepsilon$ e $3+\varepsilon$ conforme o gráfico a seguir.

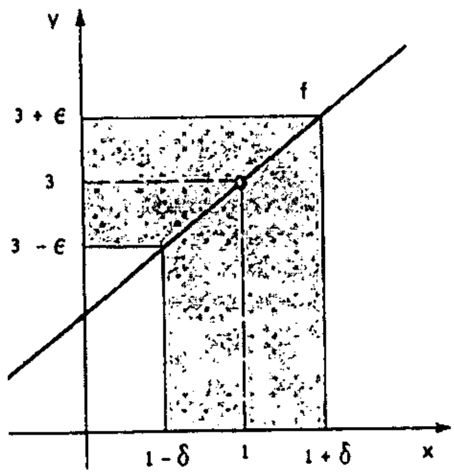


Fig. 1.14 a) Determinação do limite na vizinhança do ponto $x = 1$ e raio δ

Ora o valor considerado $\frac{\varepsilon}{2}$ para δ não é o único, é simplesmente o maior valor que δ pode tomar.

Assim, se se considerar $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{3}$, teremos também

$$0<|x-1|<\delta_1=\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 2|x-1|<\frac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow |2x-2|<\frac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow |(2x+1)-3|<\frac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow |f(x)-3|<\frac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} |f(x)-3|<\frac{2\varepsilon}{3} \\ \frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$$

Considerando $\delta_1<\delta$, pode-se perceber que o intervalo de extremos $1-\delta_1$ e $1+\delta_1$ está contido no intervalo de extremos $1-\delta$ e $1+\delta$ e, portanto, todo o x que satisfaz $1-\delta_1<x<1+\delta_1$ e $x\neq 1$ satisfará $1-\delta<x<1+\delta$ e $x\neq 1$ e, consequentemente, tem-se $3-\varepsilon<f(x)<3+\varepsilon$. É o que pode ser visto no gráfico a seguir. Desde que, para qualquer valor positivo ε, se possa encontrar um valor apropriado para δ tal que $0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$, diz-se então que o limite de $f(x)$, quando x tende para 1, é 3. Simbolicamente tem-se: $\lim_{x\to 1} f(x)=3$

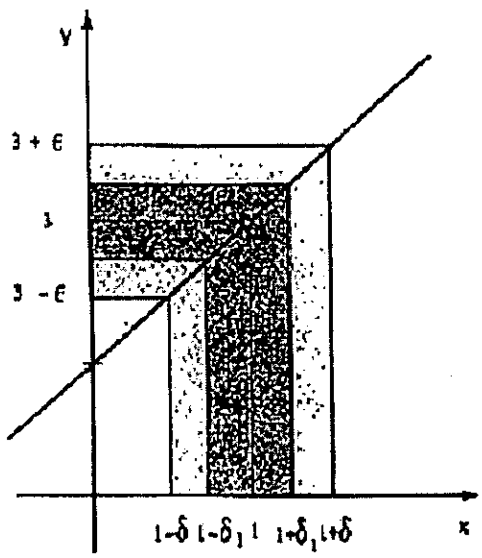


Fig. 1.14 b) Determinação do limite na vizinhança do ponto $x=1$ e raio δ_1

De acordo com os conhecimentos prévios dos alunos, o conceito de limite de uma função pode também ser introduzido combinando dois ou mais quadros anteriormente descritos. Se os alunos mostrarem dificuldades em perceber o conceito por meio de um quadro, o professor poderá recorrer a outro quadro até que compreendam. Portanto, as alternativas anteriormente abordadas podem ser usadas duma maneira combinada na sala de aula. Isto não significa que o professor, forçosamente, faça uso de combinação de quadros na introdução do conceito de limite de uma função. De notar que cada alternativa oferece ao aluno vantagens e desvantagens. A vantagem de introduzir o conceito de limite combinando vários quadros reside no facto de o aluno poder mais tarde resolver, de várias maneiras, problemas concretos que envolvem limites.

Para a resolução de problemas concretos envolvendo limites, seria difícil a aplicação de um único procedimento. Vários procedimentos podem ser usados num único problema, daí a importância de conhecer várias alternativas e fazer uso delas para que os problemas concretos sejam solucionados duma forma eficiente. A combinação de vários quadros na introdução de limites evita que a habilidade de resolução de problemas relacionados com limites de funções dependa de uma única alternativa ou quadro.

Nesta revisão da literatura foram vistos vários métodos de introdução do conceito de limite de uma função. No âmbito desta pesquisa, o quadro gráfico usando o computador foi o método escolhido. Contudo a introdução deste conceito pode ser feita usando um método ou a combinação de dois ou mais dependendo da realidade em que estudam os alunos.

1.4 Objectivo da pesquisa

O objectivo que se segue foi traçado de modo a dar uma sequência lógica à pesquisa e a responder às perguntas de investigação.

Propor e testar uma alternativa de introdução do conceito limite de uma função que possa ajudar os alunos a compreender este conceito.

Com base na informação obtida, a partir da recolha de dados acima mencionada, é importante que se apresente pelo menos uma alternativa de introdução do conceito de limite de uma função visando ajudar o aluno a compreender com facilidade este conceito.

1.5 Perguntas de investigação

Esta secção apresenta as perguntas de investigação que nortearam este estudo. Segundo resultados de estudos já feitos, os alunos enfrentam dificuldades de compreensão do conceito de limite de uma função.

Uma das razões deste problema não reside apenas na complexidade do conceito de limite, mas também na natureza do conhecimento prévio que eles têm do conceito.

As interpretações que os alunos fazem do conceito de limite parecem também ser influenciadas pela forma como este conceito lhes é ensinado na sala de aula.

A análise dos cadernos dos alunos e da consulta aos professores revelou que existe uma tendência dos professores de introduzir o conceito de limite de uma função através de ilustrações gráficas (visualização de esboços de gráficos de funções desenhados à mão) visando ajudar o aluno a compreender este conceito. O uso desses esboços é considerado por alguns professores consultados como sendo o 'método gráfico' de introdução do conceito de limite de uma função, o que conduz à formulação da seguinte pergunta de pesquisa:

1. ***Uma intervenção que consiste na introdução do conceito de limite pelo método gráfico e usando o computador poderá ajudar os alunos a melhorar a aprendizagem deste conceito?***
2. ***Que concepções poderão prevalecer nos alunos depois desta intervenção?***

1.6 Justificação do tema

Resultados de várias pesquisas sobre limites mostram que uma compreensão total do conceito de limite de uma função é rara nos alunos (Tall, 1980), e nas escolas moçambicanas este conceito é difícil de ser compreendido e interpretado.

Apesar de o presente trabalho não ser o primeiro do género, o problema de aprendizagem de limites ainda persiste nos alunos. Será que este problema não tem nada a ver com a forma como este conceito é introduzido na sala de aula? Esta questão foi o pressuposto básico que motivou o presente estudo. Então, achou-se importante que se investigassem as diversas maneiras que os professores usam para introduzir este conceito no primeiro nível (12ª classe) em que os alunos começam a estudar limites de funções, para se saber quais dessas alternativas ajudam os estudantes a compreender facilmente o conceito. Assim, este tema reveste-se de importância uma vez que poderá contribuir para melhorar a aprendizagem dos alunos do conceito de limite de uma função. A pesquisadora acredita que introduzindo o conceito de limite de uma função utilizando o método gráfico e com ajuda do computador poderá ajudar os alunos a compreender com facilidade o conceito.

O capítulo II trata da revisão da literatura onde são apresentados os estudos feitos por alguns pesquisadores sobre o conceito de limite.

Capítulo II - Revisão da Literatura

Este capítulo faz uma abordagem dos estudos feitos em Educação Matemática, concepções dos estudantes, conceito *imagem* e conceito *definição* (Tall & Vinner, 1981) bem como as concepções espontâneas e próprias de alunos analisadas por Cornu (1980). São também abordados os quadros de Douady (1986) e as representações de Janvier (1987) e uma referência à importância do uso do computador na sala de aula, no ensino de limites.

2.1 Estudos feitos sobre limites

A presente secção descreve alguns estudos em Educação Matemática sobre limites.
Desses estudos destacam-se os trabalhos de Tall & Vinner (1981), Cornu (1982,1983), Sierpinska (1985) e Trouche & Guin (1996). Tall & Vinner (1981) estudaram o conceito imagem e o conceito definição dos estudantes na Matemática, com particular ênfase nos limites e continuidade. Cornu (1982, 1983) identificou entre os estudantes alguns obstáculos, tais como: os aspectos metafísicos de infinito e de limite; as noções de infinitésimo e infinitamente grande; a questão se um limite poderia ser alcançado ou não; e o problema de transição do finito para o infinito. Ele constatou que esses obstáculos não estavam organizados em série mas que estavam interligados de uma maneira complexa.
Alguns problemas estão relacionados com a linguagem de limites. Monaghan (1991) explica que há ambiguidade inerente a quatro expressões, nomeadamente: "*tende para*", "*aproxima-se de*", "*converge*" e "*limite*". Estas expressões são geralmente usadas na sala de aula e os significados matemáticos são equivalentes. Afirma ainda que os alunos interpretam os termos "*tende para*" e "*aproxima-se de*" como representando o movimento de um objecto que se dirige para uma determinada meta, enquanto que o termo "*limite*" é interpretado como sendo essa meta a ser alcançada (esse ponto fixo). O termo "*converge*" é interpretado pelos alunos como duas linhas que se aproximam uma da outra.
Ligado a esta ambiguidade está também o problema de inconsistência na aprendizagem do conceito. Alguns destes problemas são semelhantes aos descritos por Espinoza & Azcárate (1995), que fazem uma análise geral dos problemas existentes no ensino do conceito de limite através de livros escolares seleccionados. A partir desta análise são apresentadas três grandes

classes de tipo de problemas que são essencialmente encontrados no processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite:

a) Tratamento algébrico de limite

Nas escolas os professores dedicam mais tempo aos exercícios algébricos na solução de problemas que envolvem limites. O procedimento consiste em produzir um resultado por meio de cálculos algébricos consecutivos de uma dada expressão e pela aplicação de diferentes teoremas de limites.

Certas vezes os estudantes não sabem justificar por que razão se aplica este ou aquele teorema na resolução desses exercícios.

b) Representação gráfica de funções

São dadas funções contínuas com um número finito de pontos de discontinuidade (que em geral não ultrapassa três), e uma expressão analítica algébrica. Faz-se um tratamento algébrico de modo a localizar os pontos de discontinuidade (ou determinação do domínio de existência). Depois calcula-se o limite nesses pontos e finalmente faz-se a representação gráfica da função. Nem sempre os alunos conseguem determinar os pontos de discontinuidade de uma função definida a partir de uma expressão analítica algébrica, o que lhes dificulta a construção do gráfico.

c) Estudo de funções ligeiramente diferentes

Estas funções são frequentemente valores absolutos, partes inteiras e funções definidas em intervalos. Os alunos devem reduzir essas expressões e depois calcular os limites. Apresentam dificuldades em determinar limites nesses intervalos.

Face a esses problemas, Espinoza & Azcárate (1995) recomendam que se faça uma avaliação da actividade dos professores, e também do que a literatura recomenda, no sentido de identificar não só as actividades por eles praticadas na sala de aula, mas também as que deviam ser praticadas visando proporcionar ao aluno uma aprendizagem eficiente. Pesquisas no campo educacional sugerem, segundo Espinoza & Azcárate (1995), que os alunos deveriam realizar actividades, na sala de aula, que lhes permitissem:

- ler limites no gráfico em que a respectiva expressão analítica não é conhecida;

- fazer uma relação entre funções contínuas e discretas (sucessões) no cálculo de limites;
- ter domínio de conjuntos numéricos (números inteiros e reais);
- compreender a noção de densidade do eixo real para poderem manejar dízimas (finitas ou infinitas) no estudo de limites, pois os obstáculos que aparecem residem no facto de a formulação do conceito de limite requerer o conceito de número real e por sua vez o conceito de número real requer um conhecimento do conceito de limite, o qual não pode ser concebido fora da ideia do número real.

Entretanto, no ensino secundário das escolas moçambicanas, o conceito de número real é o conteúdo da 9ª classe. Este conceito, neste nível de ensino, não é introduzido a partir do conceito de limite. Este último é introduzido na 12ª classe. Portanto, se o conceito de número real não for bem percebido na 9ª classe, o conceito de limite poderá igualmente não ser bem percebido na 12ª classe. Sobre este aspecto, Schwarzenberger & Tall (1978, p. 45) afirmam que se o conceito de número real não for bem percebido pelos alunos num determinado nível, dificilmente compreenderão o conceito de limite nos níveis seguintes.

Trouche (1996), citado por Huillet & Mutemba (1999), concluiram haver três aspectos do conceito de limites: abordagem cinemática, relacionada com a ideia de movimento; abordagem de aproximação, e abordagem operativa. Da análise dos livros escolares e exames nacionais das escolas secundárias da França, Trouche chegou à conclusão que a abordagem operativa era dominante.

Na base de uma evidência empírica, Sierpinska (1985) afirma que os obstáculos epistemológicos primários relacionados com limites estão ligados aos conteúdos do número real, infinito e função. Isto significa que os alunos não entendem bem o conceito de número real, o conceito de infinito e o conceito de função. Estes são os grandes obstáculos que podem inibir a compreensão do conceito de limite. Por exemplo, em relação a 0,999... o aluno pode não entender o significado das reticências (...), que subentendem uma infinidade de noves. Aqui, está incluso o conceito de infinito. E no que diz respeito à função introduz-se este conceito a partir da aplicação de um conjunto A num outro conjunto B (correspondência unívoca). Entretanto, no conjunto dos números reais, poucos alunos entendem a densidade do eixo real. Pode-se dizer também que o conceito de uma função está ligado com o conceito de aplicação (correspondência), consequentemente, ligado com o conceito de número real; logo, está ligado ao conceito de infinidade de números reais, o que conduz ao conceito de infinito.

Huillet & Mutemba (1999) analisando os conteúdos dos programas de Matemática, do manual de Matemática e de trinta exames do último nível do ensino secundário (11ª classe ou 12ª classe do Sistema Nacional de Educação em vigor em Moçambique a partir de 1983) afirmam que, conforme os conteúdos do programa de ensino, o conceito de limite é introduzido na 12ª classe na unidade didáctica "sucessões", depois do estudo de funções reais de variável real; e o conceito de assímptota introduz-se sem usar o termo "limite", mas em conexão com funções racionais simples.

Relativamente aos conteúdos do manual de Matemática da 11ª classe, Huillet & Mutemba (1999) observam que o conceito de limite é abordado teoricamente, usando definições em linguagem ε / δ e teoremas com demonstrações, e quase todos os exercícios práticos do manual são de aplicação de regras algébricas (nunca se contempla a actividade de esboçar gráficos de funções).

Sobre os trinta exames finais, Huillet & Mutemba (1999) afirmam que a maior parte dos exercícios sobre limites de funções está relacionada com o cálculo de limites que conduzem a indeterminações. Para cada tipo de indeterminação, os alunos devem aprender a respectiva técnica. Da análise dos conteúdos do programa de ensino, do manual de ensino e dos exames finais, Huillet & Mutemba (1999) encontram uma contradição, por um lado, entre o desenvolvimento teórico do conceito de limite apresentado no manual e, por outro, o que se espera dos alunos em relação ao conceito apresentado nos exames e nos exercícios do manual. Afirmam que esta contradição já tinha sido reportada por Espinoza & Azcárate (1995) que enquanto se lida com limites, são apresentados vários modelos teóricos sobre este conceito, os quais nunca são aplicados no desenvolvimento de actividades propostas para os alunos.

Huillet & Mutemba (1999) referem-se também aos quadros numérico e gráfico, que são raramente usados no ensino de limites. A respeito disto, afirmam que os professores privilegiam o quadro algébrico visto que nos exames finais os exercícios sobre limites estão mais relacionados com cálculos de limites que envolvem aplicação de regras algébricas.

Um ano mais tarde, Huillet & Mutemba (2000) apresentaram alguns resultados de pesquisa respeitantes às concepções dos professores moçambicanos sobre limites de funções e o seu ensino. O trabalho consistiu de uma análise do questionário e entrevista submetidos aos professores. Portanto, no campo educacional o conceito de limite continua a ser pesquisado. Nestas pesquisas são tomadas em consideração as dificuldades de compreensão do conceito de limite pelos alunos, as dificuldades de ensino, a linguagem usada e as concepções dos alunos em relação ao conceito.

2.2 Quadro Teórico

A palavra limite é usada na vida real e também na Matemática. Entretanto, aquilo que na vida quotidiana se considera limite não coincide com a definição formal. Por exemplo, na vida quotidiana limite pode ser considerado como uma barreira que não se pode transpor. Mas, em Matemática, a definição matemática de limite não significa barreira nem movimento.

Os alunos vão à escola com um modelo mental de limite que não coincide com a definição de limite, dificultando a compreensão do conceito na sala de aula. Este modelo mental é, neste caso, o conceito imagem de limite.

O conceito de limite de uma função é introduzido nas escolas moçambicanas de diferentes maneiras, a definição não é a mesma nessas escolas, o que leva a crer que os alunos concebem este conceito também de diferentes maneiras. Existem estudos feitos que descrevem concepções dos alunos. A seguir são revistas as concepções do conceito imagem e conceito definição, concepções próprias e espontâneas dos estudantes e quadros e representações de Janvier.

2.2.1 Conceito imagem e conceito definição

O conceito imagem

Tall & Vinner (1981) explicam que o conceito imagem consiste de todas as estruturas cognitivas na mente de cada indivíduo associadas com um dado conceito. Este conceito não é desprovido de sentido mesmo antes da sua introdução de uma maneira formal.

Muitos conceitos do domínio da Matemática têm sido interpretados de alguma forma ou de outra antes de serem formalmente definidos e uma complexa estrutura cognitiva existe na mente de todo o indivíduo, criando uma variedade de imagens mentais pessoais quando um conceito é mencionado.

O conceito definição

O conceito definição é uma forma de palavras usadas para especificar esse mesmo conceito (Tall & Vinner,1981, p. 152). O conceito definição pode ser uma construção individual feita por um estudante, isto é, uma forma de palavras que o estudante usa para explicar o que ele imagina na sua mente.

A definição formal de limite de uma função é um conceito definição que é aceite por toda a comunidade de matemáticos.

Resultados de várias investigações mostram que conceitos imagens individuais podem ser diferentes dos estabelecidos pela teoria formal podendo causar conflitos cognitivos no indivíduo.

2.2.2 Concepções espontâneas e concepções próprias

Concepções espontâneas

Cornu (1983) explica que o aluno já possui um certo número de ideias, de imagens, de processos, de expressões que formam um conjunto que pode não ser coerente, mas que funciona em certas ocasiões e a essas concepções dá-se o nome de concepções espontâneas. Concepções espontâneas, ainda segundo este autor, são ideias prévias que não são fruto de um ensino organizado. Estas concepções são ideias de diversas situações da vida quotidiana. Assim, a noção de "limite" e a ideia de "tende para" já existem na mente dos alunos de uma forma particular antes do processo de ensino e aprendizagem.

As concepções dos alunos nem sempre se apresentam de uma forma clara e eles nem sempre estão habilitados a dar uma definição do conceito de limite. Contudo, estas concepções espontâneas podem ser exploradas e usadas pelo professor para levar o aluno a compreender (ou acomodar) o conceito matemático de limite. As concepções espontâneas dos alunos nem sempre desaparecem na sequência do processo de ensino. Os estudantes, depois de receberem aulas, podem persistir com as suas concepções espontâneas em vez de acomodar os conceitos formais ensinados na sala de aula. Eles podem aprender, por exemplo, o conceito de limite na sala de aula, mas, passado algum tempo, poderão não ser capazes de dar uma explicação adequada. Contudo, o professor pode ajudar o aluno a organizar as suas ideias, ainda que incompletas, incoerentes ou até mesmo contraditórias, confrontando-as com a realidade científica e melhorá-las permitindo que o aluno chegue a conclusões cientificamente correctas.

Concepções próprias

Cornu (1983, p. 69) afirma que "*concepções próprias dos alunos são as concepções que são provenientes de concepções espontâneas e do ensino que recebem*".

Em relação ao conceito de limite de uma função, as concepções próprias dos alunos podem conter imagens mentais, representações ou expressões ligadas à noção de limite, definições, propriedades, teoremas, algoritmos. Para estudar as concepções próprias dos alunos pode-se analisar os erros que os alunos cometem. Estes erros não são com efeito fruto de ignorância, mas sim, de concepções e de representações mentais bem organizadas e precisas.

2.2.3 Quadros de Douady e representações de Janvier

Douady (1986), citada por Huillet & Mutemba (1999), mostrou que um conceito matemático pode ser estudado em diferentes quadros, que são: algébrico, numérico, gráfico, geométrico e algorítmico. Segundo este autor, o ensino e a aprendizagem de um certo conceito matemático, por exemplo o conceito de limite, pode ser feito combinando dois ou mais quadros. A vantagem de ensinar um dado conceito combinando vários quadros é explicada por Janvier (1987), que, em vez de quadros, fala de representações apresentando um conceito sob forma de um iceberg com o formato de estrela. De acordo com Janvier (1987), cada ponta da estrela corresponde a uma representação. Portanto, a sugestão dada por Douady de combinar vários quadros no ensino de um dado conceito matemático (por exemplo limite de uma função) entra em concordância com a afirmação de Janvier quando este fala da necessidade de conhecer todas as pontas da estrela. As sugestões tanto de Douady como de Janvier levam a entender que o ensino de um conceito matemático deve fazer uso dos diferentes quadros ou representações não de forma separada, mas sim, de forma combinada.

O uso de um único quadro ou representação, ou o uso separado dos mesmos, leva os alunos a aprender conceitos restringindo-se a esse único quadro ou representação. Se forem solicitadas algumas aplicações aos alunos, não serão capazes de sair dos quadros a que se encontram restringidos. Segundo Janvier, este aspecto caracteriza-se como deformação do iceberg em que uma das pontas da estrela é mais desenvolvida do que as outras.

Huillet (2001, p.2) afirma que "*no ensino, muitas vezes, os conceitos são apresentados num único quadro...*". Em muitas escolas moçambicanas, no caso particular de ensino de limites, tem-se verificado que o quadro predominante é o algébrico. Os alunos sabem mais calcular limites que envolvem expressões algébricas aplicando fórmulas ou algoritmos matemáticos já conhecidos do que, por exemplo, ler ou interpretar limites num gráfico, apesar de, na introdução deste conceito, alguns professores recorrerem aos quadros numérico e gráfico.

2.2.4 Utilidade do computador no ensino do conceito de limite de uma função

O ensino da Matemática não exclui a possibilidade de uso de materiais e meios de ensino diversificados tais como o computador ou a calculadora gráfica. Bishop et al. (1996) afirma que os programas do computador, por exemplo CAS (Sistemas de Computação Algébrica), Derive e Maple, permitem aos alunos definir, combinar, transformar, comparar, visualizar e até certo ponto manipular funções e relações em qualquer uma das suas formas de representação tradicional conduzindo a mudanças significativas na solução de problemas matemáticos. Estas mudanças reflectem problemas novos e mais realistas: necessidade de adaptação dos métodos usados anteriormente aos novos métodos compatíveis com a linguagem usada pelo computador ou pela calculadora. Os computadores permitiram dar um salto de técnicas dedutivas para técnicas indutivas e empíricas de solução de problemas matemáticos.

Trouche & Guin (1999) afirmam que a introdução do uso de calculadoras gráficas (ou computador) no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos não simplifica o trabalho do professor nem dos alunos, mas requer uma nova organização do ensino, do espaço de aprendizagem e novo estilo de gestão de tempo. Sob estas condições, trabalhar em ambientes com calculadoras complexas pode conduzir a uma transformação das atitudes dos alunos em relação à Matemática dando prioridade ao trabalho criativo. Além disso, pode-se ver uma transformação no relacionamento dos alunos nos grupos de trabalho face ao conhecimento dando maior importância aos aspectos sociais.

Shoaf, citado em Trouche & Guin (1999), descreve o comportamento dos alunos trabalhando em ambientes de novas tecnologias como sendo um processo no qual o aluno está silenciosamente a conversar consigo próprio através da máquina calculadora, fazendo suas perguntas à medida que vai manipulando as imagens que aparecem no écran, construíndo o seu próprio conhecimento matemático através de uma reflexão consciente.

Alguns autores (Li & Tall, 1993; Monaghan et al., 1994; Tall, 1992) afirmam que mesmo as novas tecnologias, por exemplo o uso do computador no ensino de limites, não têm sido solução para os alunos compreenderem este conceito, contrastando a ideia de Carvalho e Silva (1988), que diz que: " *...Verificamos pois que o computador nos permite traçar tantos gráficos deste tipo quanto pretendemos, por nossa iniciativa ou a pedido dos alunos, até esta* *série de conceitos ficarem compreendidos ...*". Para o caso da introdução do conceito de limite através do método gráfico, usando o computador, os alunos podem definir, combinar, transformar, comparar, visualizar, manipular funções e resolver uma grande gama de exercícios por sua iniciativa ou do professor.

Duma maneira geral, o capítulo apresenta os estudos feitos por alguns pesquisadores sobre o conceito de limite. Algumas dessas pesquisas apuraram que este conceito é de difícil compreensão. Assim, é necessário que sejam envidados esforços pelo professor no sentido de tornar o conceito mais fácil de perceber. Sobre este propósito, alguns pesquisadores propõem novos métodos, alternativas, quadros ou modelos de ensino deste conceito na sala de aula, incluindo o uso de novas tecnologias tais como a calculadora gráfica ou o computador.
Neste capítulo realça-se a importância de se tomar em conta as concepções dos alunos, o uso de diferentes quadros e de novas tecnologias no ensino de limites com vista a desenvolver nos alunos habilidades de análise e de solução diversificada de problemas relacionados com limites.

Capítulo III - Metodologia

A investigação consistiu de três fases: fase de recolha de informação preliminar, fase de intervenção e fase de entrevista dos alunos consoante a estrutura da pesquisa apresentada na Fig. 3.1.

O presente capítulo descreve a metodologia usada com vista a alcançar os objectivos formulados no Capítulo I e responder às perguntas de investigação apresentadas no mesmo capítulo.

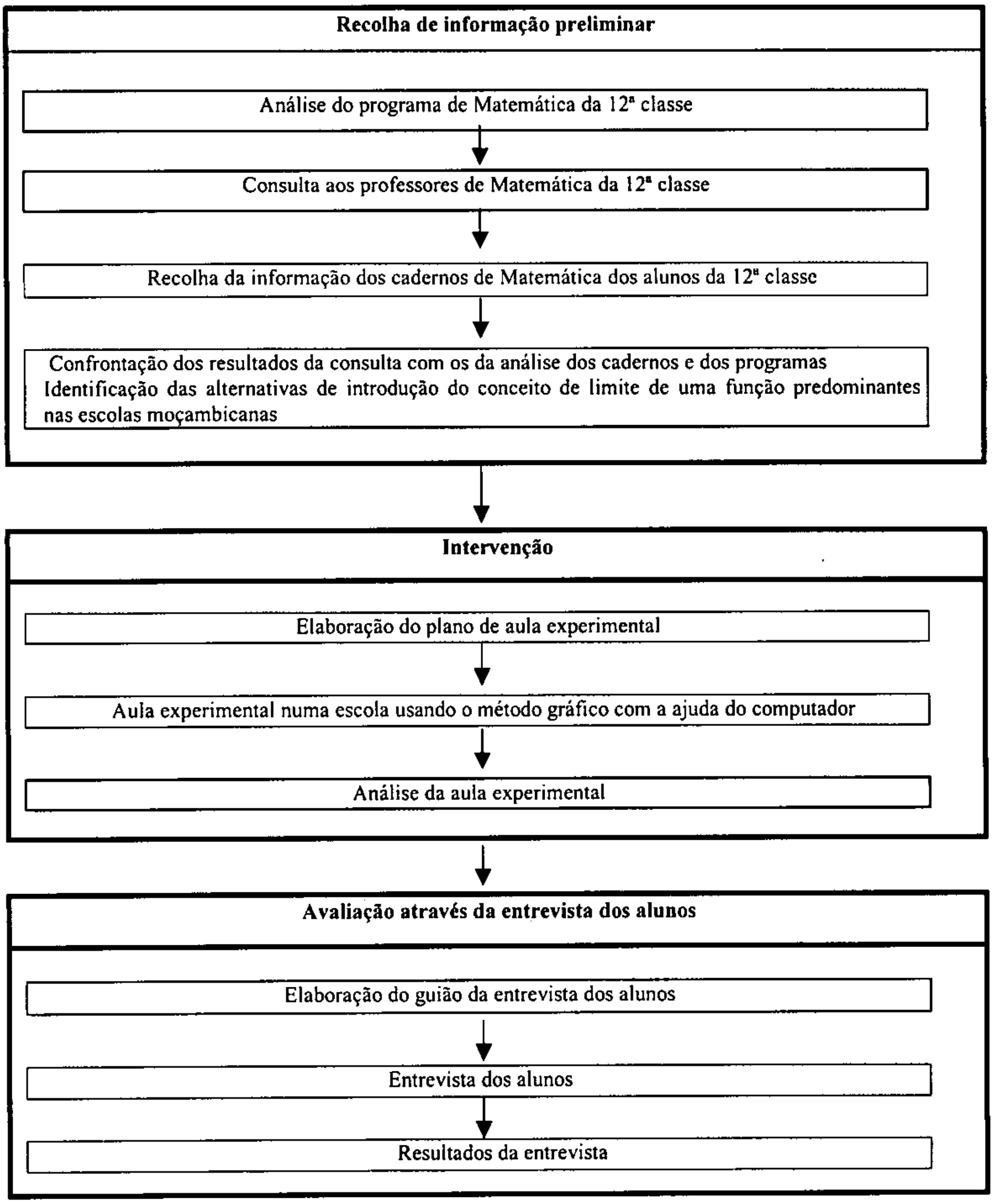


Fig. 3.1 Estrutura da pesquisa

Em geral, o tipo de informação que os instrumentos de recolha de dados desta pesquisa recolheu e analisou consiste em ideias, opiniões, sentimentos ou intenções (dados esses não quantificáveis), Por esta razão o carácter qualitativo desta pesquisa.

Na secção seguinte apresentam-se detalhadamente as fases da intervenção e de avaliação através da entrevista dos alunos.

3.1 Fase de Intervenção

Esta fase compreende as seguintes actividades:

- Elaboração do plano da aula experimental;
- Aula experimental numa escola utilizando o método gráfico com ajuda do computador;
- Análise da aula experimental.

Elaboração do plano da aula experimental

Esta actividade envolve a elaboração de um plano de aula tendo em conta a maneira como o conceito de limite de uma função é introduzido nas escolas moçambicanas. Segundo a análise dos questionários preenchidos pelos professores e dos cadernos dos alunos bem como do programa do ensino, foi elaborado um plano de experimentação (lição). O método de introdução (método gráfico) preconizado na experimentação foi seleccionado de um conjunto de métodos pouco usados nas escolas, mas pensamos que facilitaria a compreensão do conceito de limite pelos alunos. Para esta experimentação, tinha sido prevista a gravação dos momentos mais importantes da aula. Infelizmente houve uma avaria técnica do gravador, pelo que não foi possível fazer a gravação.

Como alternativa foram feitas anotações e observações para a reconstituição da aula. No plano foram incorporados muitos exercícios que conduzissem os alunos a ler limites num gráfico e a determinar assímptotas. A construção e visualização dos gráficos foram feitas em computador pela rapidez de processamento de informação e perfeição de construção de gráficos. Esta experimentação foi elaborada pelas seguintes razões:

- Notou-se, através da informação dos cadernos e dos questionários preenchidos pelos professores, uma tendência de uso de ilustrações gráficas na introdução do conceito de limite de uma função;
- Essas ilustrações gráficas são esboços não perfeitos que não permitem que o aluno aprenda, através deles, a ler graficamente o limite;
- Nos cadernos dos alunos não há exemplos nem exercícios práticos de leitura de limite de uma função no gráfico, senão exercícios de cálculo de limites e levantamento de indeterminações de limites notáveis aplicando algoritmos ou regras algébricas;

- Esses esboços foram considerados no questionário como sendo o método gráfico de introdução do conceito de limite de uma função.

Aula experimental numa escola utilizando o método gráfico com ajuda do computador

O plano de experimentação foi implementado numa escola secundária, num período normal de aulas, a uma turma de alunos da 12ª classe durante 90 minutos (aula dupla de Matemática). Durante a experimentação foi observado como os alunos se empenhavam na realização das actividades programadas para essa aula, a maneira como liam o limite no gráfico. Foram também observados nos alunos os aspectos cognitivos, seu empenho, a sua motivação e o seu dinamismo relativamente à experimentação (ver detalhes no Capítulo IV).

Análise da aula experimental

A análise detalhada da aula experimental não foi possível porque a aula não foi gravada, o que dificultou, até certo ponto, a análise dos dados. O que houve foi a reconstituição da aula com o professor da turma. Esta reconstituição contém reflexões sobre o método usado na aula e reflexões sobre pontos de clarificação das dificuldades apresentadas pelos alunos baseadas nas anotações do professor.

3.2 Fase de avaliação através da entrevista dos alunos

Depois da sessão de experimentação, foram planificadas entrevistas aos alunos com objectivo de avaliar os efeitos da intervenção. Houve intenção de entrevistar alguns alunos da intervenção e outros que não participaram na intervenção. As actividades realizadas nesta fase foram:

- Elaboração do guião
- Entrevista dos alunos
- Análise das entrevistas

Elaboração do guião

O guião da entrevista (Anexo II) foi elaborado com o objectivo de comparar as respostas dos dois grupos de alunos acerca do que tinham aprendido sobre o conceito de limite de uma função, suas concepções (conceito imagem e conceito definição) em relação ao conceito de limite, o que entendiam por limite no contexto matemático e no contexto real, isto é, na vida real, e explorar o significado das expressões "tende para" e "aproxima-se de".

Os dados desta entrevista serviram para avaliar o grau de compreensão do conceito de limite pelos alunos, ensinados por meio de experimentação. A entrevista consistiu de sete perguntas sendo uma delas extraída da literatura (Cornu,1983, p.100).

A primeira pergunta da entrevista serviu, em particular, para criar um ambiente motivador para o início da entrevista.

Com as perguntas II a IV pretendia-se obter dos alunos:

- a sua imaginação em relação à extensão (infinidade) do eixo real, no contexto de limites;
- se eles se recordavam das propriedades da função exponencial e do valor que toma no ponto $x = 0$;
- a sua imaginação sobre o conceito de valores aproximados de 1 à esquerda e quão próximo de 1 se encontra o número real $0{,}999...99$;
- se eles sabiam ler limites no gráfico duma função num dado intervalo;
- se eles se recordavam do limite de uma função constante.

As perguntas V e VI visavam avaliar se sabiam, além de ler limites no gráfico, distinguir assímptotas horizontais das verticais do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ e dizer o que ocorre com as assímptotas quando o gráfico é deslocado a unidades para direita ou para a esquerda, ou b unidades para cima ou para baixo.

Com a sétima e última pergunta pretendia-se ouvir dos alunos que tinham participado na experimentação o seu sentimento em relação à aprendizagem do conceito de limite de uma função pelo método gráfico com o auxílio do computador, isto é, se as facilidades e rapidez de construção de gráficos oferecidos pelo computador lhes tinham ou não facilitado a compreensão deste conceito e ouvir as vantagens e desvantagens do uso do computador no estudo de limites de funções.

Entrevista aos alunos

A entrevista envolveu nove alunos, sendo quatro do Colégio Kitabu e cinco da Escola Secundária Francisco Manyanga (que tiveram aula de introdução do conceito de limite com um outro professor, sem ajuda do computador) com a duração de 20 minutos para cada aluno. O instrumento de registo das respostas dos alunos foi o gravador.

Análise da entrevista

A entrevista foi gravada e sujeita a uma análise com base nas transcrições. A primeira fase consistiu na elaboração de uma tabela contendo respostas esperadas. Na segunda fase foram analisadas as respostas dos alunos (aluno por aluno) e feitas duas tabelas de comparação das suas respostas. Estas tabelas tinham como objectivo analisar as concepções dos alunos a respeito de limite de uma função e da palavra limite no contexto não matemático.

Concluindo, pode-se afirmar que a investigação consistiu das fases de recolha de dados preliminares, da intervenção e da avaliação através da entrevista dos alunos. Na primeira fase foram analisados os conteúdos do programa de ensino de limites, dos cadernos de alguns alunos e das consultas aos professores. Da confrontação desta informação conclui-se que tanto professores da mesma escola como de escolas diferentes introduzem o conceito de limite de uma função de maneiras diferentes. De todas as formas de introdução deste conceito o método gráfico é o menos usado. Por esta razão se dicidiu planificar uma intervenção em que seria usado o método gráfico e incorporando o computador como um meio de auxiliar na construção perfeita e visualização rápida dos gráficos das funções previstas no plano de aula. Nesta aula cada aluno teve acesso a um computador para realizar actividades previstas no plano e o papel da pesquisadora foi o de professora (facilitadora) da lição. Depois da intervenção foi planificada uma entrevista em que os alunos foram entrevistados com as entrevistas gravadas e transcritas.

O capítulo seguinte refere-se à intervenção, que consiste numa aula de introdução do conceito de limite de uma função.

Capítulo IV - Introdução do conceito de limite de uma função usando o quadro gráfico com ajuda do computador

Este capítulo descreve a aula experimental em que foi usado o método gráfico por meio do computador como alternativa. Verificou-se que o método gráfico é vantajoso porque o aluno pode determinar o limite sem recorrer a cálculos.

Da análise da revisão da literatura foi considerada a sugestão de que o computador ajuda a construir gráficos mais perfeitos e muito mais depressa do que quando são construídos manualmente, permitindo assim que os alunos analisem o comportamento de muitos e diferentes gráficos nos pontos onde se pretende determinar o limite. Associando esta vantagem oferecida pelo computador à informação obtida da análise dos cadernos dos alunos e das consultas aos professores e de acordo com o programa de ensino, foi planificada a aula experimental descrita no presente capítulo.

A aula experimental teve lugar no Colégio Kitabu envolvendo alunos da 12ª classe. Ela não foi gravada, o que dificultou, até certo ponto, a análise dos dados. Durante a aula experimental, os alunos poderiam trocar impressões entre eles, e a pesquisadora estava disponível para qualquer ajuda que solicitassem.

4.1 Desenho da aula experimental

Como se referiu na introdução do capítulo anterior, depois de se analisar os conteúdos dos cadernos dos alunos e das consultas aos professores, foi possível obter informação referente à forma como o conceito de limite é introduzido nas escolas. Com base nos resultados da análise do programa de Matemática, dos cadernos dos alunos e das consultas aos professores decidiu-se seleccionar o método gráfico (o menos usado conforme os resultados da análise acima referida) e elaborar um plano de aula em que este método seria usado como alternativa de introdução do conceito de limite de uma função. Esta aula seria dada tendo o computador como recurso devido à rapidez de processamento de informação (neste caso, construção de gráficos com precisão e perfeição) que este oferece.

Com vista a levar o aluno a compreender o conceito de limite através do método gráfico usando o computador, o aluno deveria analisar muitos e diferentes gráficos, previamente planificados para essa aula experimental. A rapidez de processamento ajudaria a motivar o aluno a visualizar gráficos, não somente os planificados como também outros à sua escolha, manipular ou modificar as suas expressões analíticas para obter novos gráficos, ler os respectivos limites no gráfico e comparar os novos resultados com os obtidos anteriormente.

4.1.1 Plano da aula

Alguns professores afirmaram, nas consultas, que usavam a função $f(x)=\frac{1}{x}$ para explicar o conceito de limite. Foi com base nesta informação que foi seleccionada a função racional do tipo $y=\frac{k}{x}$, que serviria para introduzir, durante a aula experimental, o conceito de limite de uma função pelo método gráfico. Entretanto, foram também usadas outras funções do tipo $y=\frac{k}{x+a}+b$, mas aquela foi a predominante.

Como pré requisitos partiu-se do príncipio que os alunos já conhecem, da unidade didáctica *sucessões*, o conceito de limite de uma sucessão, o uso dos símbolos $n \to \infty$ sendo n natural, a sucessão decrescente $u_n=\frac{1}{n}$ e o tipo de gráfico correspondente a esta sucessão assim como o seu limite (o seu comportamento quando $n \to \infty$). Assim, as noções de *tende para*, *aproxima-se de*, *tem por limite...* são do conhecimento dos alunos de acordo com a dosificação do programa de ensino. Embora a escola onde decorreu a aula experimental tenha uma dosificação diferente da do programa oficial, a unidade "limite de sucessões" precede a unidade "limite de funções", pelo que os alunos já tinham aprendido o conceito de limite e possuíam os requisitos básicos necessários para a aprendizagem do conceito de limite de uma função. O conceito de assímptota é introduzido quando se ensina a unidade didáctica *funções*.

A seguir apresentam-se as actividades a serem desenvolvidas pelos alunos:

1. Visualize os gráficos das seguintes funções, indicando em cada caso as assímptotas:

   a) $f(x)=\frac{1}{x}$; b) $f(x)=\frac{-1}{x}$; c) $f(x)=\frac{2}{x}$; d) $f(x)=\frac{1}{3x}$; e) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; f) $f(x)=\frac{-1}{x^2}$

2. Visualize os gráficos das funções $f(x)=\frac{1}{x}$ e $f(x)=\frac{-1}{x}$ no mesmo sistema cartesiano.

   a) Indique as assímptotas de cada gráfico. O que se pode afirmar sobre elas, são as mesmas para ambas as funções ou não?

   b) De que valor do eixo das ordenadas se aproxima o gráfico de cada função quando $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$? A esse valor denomina-se *limite* da função.

c) Visualize os gráficos das funções $f(x)=\frac{1}{x^2}$ e $f(x)=\frac{-1}{x^2}$ no mesmo sistema cartesiano.

Leia os limites nos gráficos quando $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$.

3. Visualize separadamente o gráfico de cada uma das seguintes funções:

   a) $f(x)=\frac{1}{x-1}$, b) $f(x)=\frac{1}{x+1}$, c) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ e d) $f(x)=2+\frac{1}{x-1}$.

   1º) Identifique as assímptotas vertical e horizontal de cada gráfico;

   2º) Leia através do gráfico os limites das funções acima dadas, considerando o seguinte:

   a) quando $x \to 1^-$, $x \to 1^+$, $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$

   b) quando $x \to -1^-$, $x \to -1^+$, $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$

   c) quando $x \to 2^-$, $x \to 2^+$, $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$

   d) quando $x \to 1^-$, $x \to 1^+$, $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$

A partir destas actividades seriam estudadas as assímptotas verticais e horizontais, os limites nos extremos menos infinito e mais infinito do eixo das abcissas e os limites na vizinhança do ponto onde cada função não está definida. Como houvesse computadores suficientes na sala de informática, podendo cada aluno trabalhar individualmente, essas actividades foram planificadas como independentes. Entretanto, os alunos podiam trocar impressões entre eles.

4.1.2 O papel da professora (pesquisadora) durante a aula

Durante a aula experimental, a pesquisadora desempenhou o papel de professora. Tratando-se de uma aula em que seria usado um *software* que os alunos nunca tinham usado no estudo de limites de funções, era importante que aprendessem primeiro os comandos e procedimentos que lhes permitiriam a realização das actividades planificadas para a aula. A pesquisadora explicou-lhes também como ler limites num gráfico, como modificar a expressão analítica de uma função já introduzida no computador para obter dois gráficos (o novo e o anterior) no mesmo sistema cartesiano ortogonal (os gráficos aparecem em cores diferentes no mesmo sistema) e como fazer a análise comparativa dos gráficos (limites) visualizados. Enquanto os alunos realizavam as actividades recomendadas, ela ia observando, controlando o empenho de cada um deles na realização das actividades e, em caso de necessidade, ajudava os alunos a encontrar uma via que conduzisse a uma determinada solução.

4.1.3 Actividades dos alunos

Uma vez compreendidos os procedimentos acima descritos, os alunos passaram a realizar as actividades recomendadas no plano de aula. Portanto, segundo o plano de aula, tinham que definir no computador as expressões analíticas das funções recomendadas e visualizar os respectivos gráficos, ler limites no gráfico nos pontos dados (do seu domínio de existência ou onde ela não está definida), modificar expressões analíticas já definidas de algumas funções e fazer uma análise comparativa com os resultados obtidos anteriormente, tirar conclusões sobre o que aprenderam na introdução do conceito de limite de uma função usando o computador.

Concluindo, pode-se afirmar que o computador, neste método gráfico, foi um meio que permitiu uma construção e visualização perfeitas dos gráficos e dos pontos onde se pretendia ler limites. Os alunos visualizaram muitos gráficos de funções previstas no plano de lição lendo limites em pontos determinados e analisando assímptotas horizontais e verticais dos gráficos visualizados.

Capítulo V – Resultados

5.1 A intervenção

A intervenção consistiu na implementação do plano de lição visando introduzir o conceito de limite de uma função pelo método gráfico usando o computador. A aula experimental durou 90 minutos e neste intervalo de tempo os alunos resolveram todos os exercícios previstos, os quais incluíam a introdução no computador das expressões analíticas das funções, visualização dos respectivos gráficos e leitura de limites nos gráficos. Este volume de actividades não seria exequível nesse espaço de tempo se não fosse usado o computador.

O exemplo de função que serviu para a introdução do conceito de limite foi a função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Não foi fácil para alguns alunos, de imediato, introduzir correctamente no computador a expressão analítica desta e de algumas funções da ficha de acordo com a sintaxe do *software*. Contudo, eles verificaram que o computador tinha construído rapidamente e com precisão o gráfico da função, sem necessidade de introduzir valores da variável independente x. Entretanto, o gráfico visualizado pelo computador de um dos alunos parecia diferente do construído pelo computador do seu colega ao lado e parecia tocar o eixo das abcissas a partir dos pontos $x = -8$ e $x = 8$ e no eixo das ordenadas a partir dos pontos $y = -8$ e $y = 8$ respectivamente. O aluno disse que não sabia que tecla tinha pressionado para que o gráfico fosse assim diferente (ver Fig. 5.1 à direita).

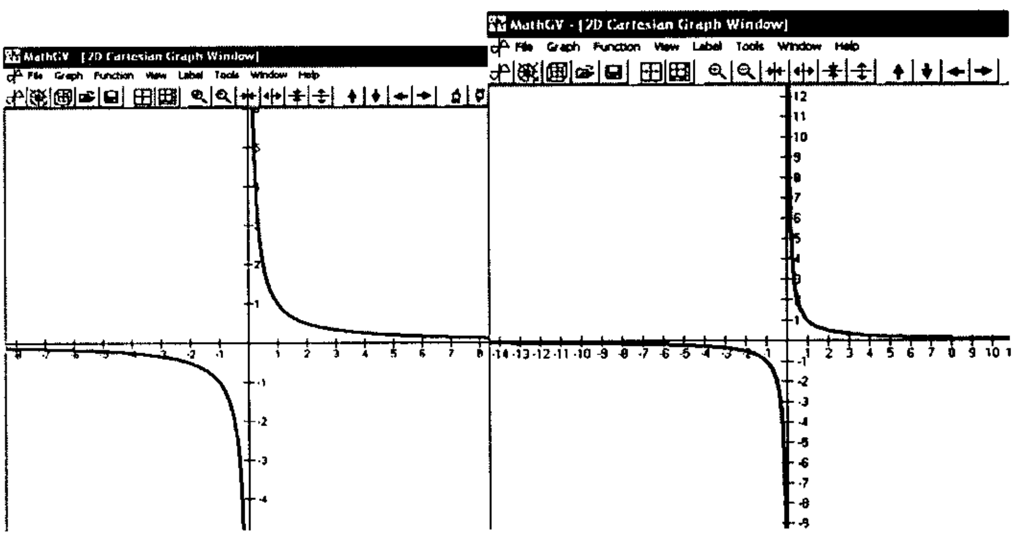


Fig. 5.1 Gráficos da função $f(x) = \frac{1}{x}$ visualizados em escalas diferentes

Este resultado foi apresentado à turma para uma breve discussão (o gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x}$ toca ou não os eixos ortogonais?) e serviu de ponto de partida para o estudo de outros comandos, tais como os que permitem ampliar ou comprimir gráficos, alterar expressões analíticas já introduzidas ou manipular gráficos no *software* MathGv.

Surgiram então duas ideias diferentes a respeito do comportamento desta função: uma era que o gráfico tocava os eixos e a outra que dizia que não tocava. Esta diferença de resultados suscitou motivação e discussão, entre os alunos, à volta do comportamento desta função em relação aos eixos ortogonais. A discussão conduziu ao estudo das assímptotas da função. Para que eles prosseguissem a discussão com vista a chegarem, eles próprios, a uma conclusão, a pesquisadora ensinou-lhes os comandos que permitem aumentar a escala de visualização (*Zoom In*) ou reduzí-la (*Zoom Out*), e vários outros, por exemplo, os que permitem modificar expressões analíticas de funções já definidas, visualizar no mesmo sistema ortogonal dois ou mais gráficos, etc. Eles começaram, desta forma, a analisar no computador o comportamento do gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x}$ em relação aos eixos ortogonais. Eles viram, a partir da execução dos comandos do menú *View* e de outros, que o gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x}$ não tocava os eixos ortogonais. O aluno que obteve, logo no início da aula, o gráfico visualizado numa escala diferente da dos outros, possivelmente, teria pressionado continuamente a tecla F4 (*Zoom Out*). Este pormenor conduziu ao estudo do conceito de limite desta função no ponto de abcissa $x = 0$, tendo a pesquisadora pedido aos alunos que também analisassem e tirassem conclusões sobre o comportamento da função não só nas proximidades do ponto $x=0$ como também nos casos em que os valores de x tendem para $+\infty$ e para $-\infty$. Eles experimentaram alguns valores e graficamente verificaram que, à esquerda de $x = 0$, os valores de *f(x)* tendem para $-\infty$. Atribuindo a x valores positivos próximos de zero, os correspondentes valores de *f(x)* são cada vez maiores (tendem para $+\infty$).

Relativamente à função $f(x)=\frac{1}{x}$ os alunos chegaram às seguintes conclusões:

Quando $x \to +\infty$, $f(x)$ aproxima-se de 0, sendo sempre positivo. Neste caso o gráfico da função aproxima-se do eixo das abcissas, mas sem nunca o atingir. Este eixo é uma assímptota horizontal ao gráfico. Quando x tende para zero à direita, $f(x) \to +\infty$ e quando x tende para zero à esquerda, $f(x) \to -\infty$. Nestes dois casos, o gráfico aproxima-se do eixo das ordenadas sem nunca o atingir. O eixo das ordenadas é uma assímptota vertical ao gráfico. Depois, os alunos prosseguiram com os exercícios de 1 a 3 apresentados no plano da aula experimental. Por exemplo, no exercício nº 3, alínea d) $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$ foi-lhes pedido que representassem o gráfico desta função e lessem o limite da função quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Os alunos tinham que definir a função constante $y = 2$ e toda a função $f(x)$ para comparar o comportamento da função em relação ao termo independente. As Fig. 5.2 à direita e Fig. 5.3 à esquerda mostram o gráfico da função $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$. A parte esquerda da Fig. 5.2 e a parte direita da Fig. 5.3 mostram o comportamento deste gráfico quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$, respectivamente. Com o aumento cada vez maior da escala de visualização, o tamanho da janela de visualização, no écran do computador, começa a não ser suficientemente maior para visualizar todo o gráfico, ficando oculta a maior parte dele.

A janela de visualização, na escala padrão, abrange somente o intervalo [-7, +7] do eixo das abcissas e [-7, +7] do eixo das ordenadas, ficando ocultos os semi-intervalos $\left]-\infty,-7\right[$ e $\left]+7,+\infty\right[$. Por exemplo, na Fig. 5.2 à esquerda, a janela conseguiu visualizar apenas a parte do gráfico $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$ e da assímptota horizontal $y = 2$, em escala maior, correspondentes aos valores de x contidos no intervalo $\left[-21,-18\right]$, não tendo sido possível visualizar o eixo das ordenadas. Para valores de x inferiores a -21 ou superiores a $+21$, a janela de visualização já não consegue visualizar nem o gráfico nem os eixos do sistema cartesiano. Porém, pode-se mover para cima ou para baixo a parte visualizada do gráfico para se ler os valores correspondentes de x, para a esquerda ou para a direita para a leitura dos valores correspondentes de y, conforme o caso.

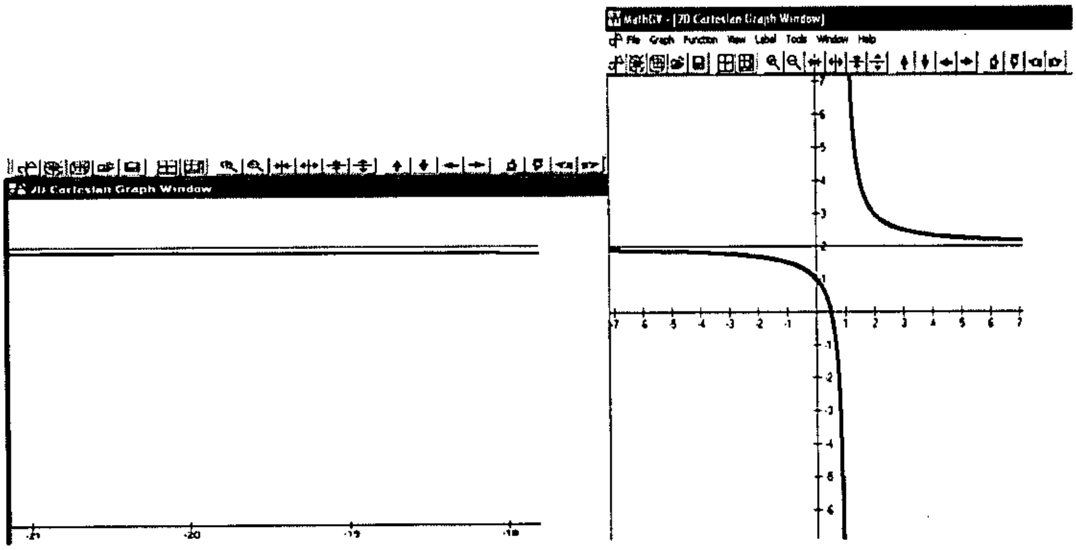


Fig. 5.2 Exemplo de leitura de limite no gráfico da função $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ quando $x \to -\infty$

À esquerda está visualizada uma parte do gráfico contida no intervalo [-21, -18].

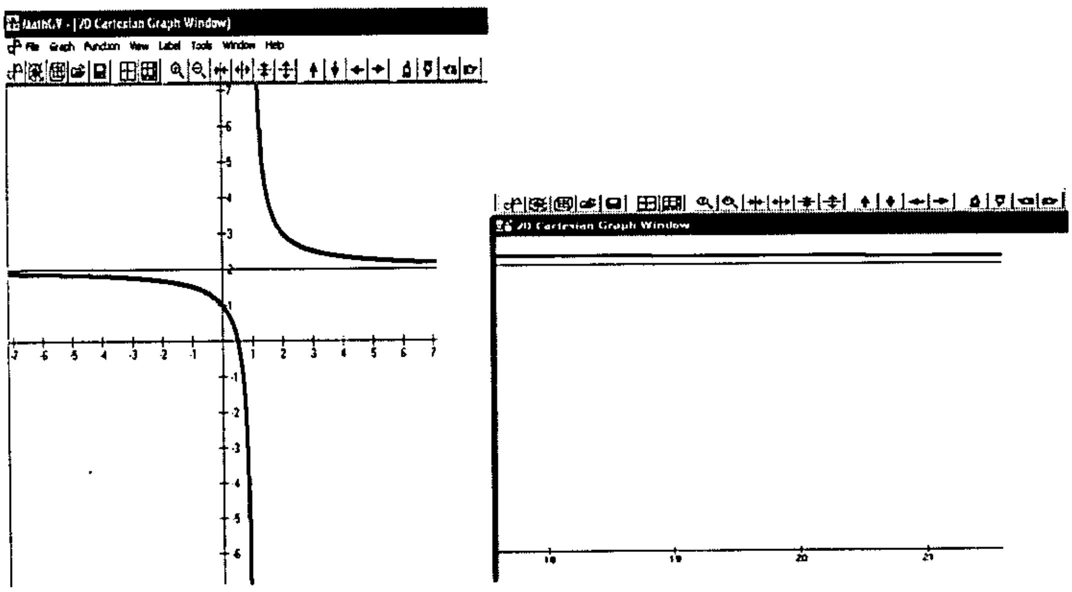


Fig. 5.3 Exemplo de leitura de limite no gráfico da função $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ quando $x \to +\infty$

À direita está visualizada uma parte do gráfico contida no intervalo [18, 21].

Com este procedimento os alunos certificaram-se que o gráfico não toca a recta horizontal (y = 2), aproximando-se, contudo, cada vez mais dela para qualquer valor de x (positivo ou negativo), o que os conduziu a concluir que o valor $y = 2$ é o limite da função $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$ quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$. Definiram a seguir, no computador, funções da sua iniciativa (não previstas no plano da aula experimental) visualizando os respectivos gráficos e fizeram a leitura de limites em determinados pontos desses gráficos.

A aula experimental permitiu confirmar o que a literatura recomenda: com o computador é possível resolver muitos exercícios sobre limites de funções, porém, a aprendizagem deste conceito pelo aluno não depende do computador, mas sim de uma planificação cuidadosa de actividades que os alunos devem realizar com vista a compreender este conceito.

A sequência lógica dos exercícios permitiu que os alunos transitassem de uma actividade para a outra depois de terem percebido a anterior culminando com a definição de funções à sua escolha.

Nesta aula experimental observou-se que os alunos estavam a aprender o conceito de limite de uma função de uma maneira diferente da habitual pelo entusiasmo, habilidades de introdução das expressões, análise dos gráficos, leitura de limites e dedicação mostrados na aula.

Os alunos nunca antes tinham tido actividades de leitura de limite num gráfico, mesmo na unidade *limite de sucessões*. Na aula experimental revelaram que tinham dificuldades em definir no computador expressões analíticas de certas funções que requeriam o uso de parêntesis.

As diferentes escalas com que o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ foi visualizado nos diferentes computadores não eram do conhecimento dos alunos. Esta situação foi novidade para os alunos e suscitou curiosidade e entusiasmo nos mesmos e, a partir dela, puderam discutir o comportamento desta função tanto nos extremos como na origem do eixo das abcissas.

Os comandos de ampliação, por exemplo *zoom in*, de redução de escala, por exemplo *zoom out*, os que permitem visualizar os extremos esquerdo e direito (*scroll left* e *scroll right*) do gráfico, os que permitem a visualização dos extremos superior e inferior do gráfico (*scroll up* e *scroll down*) facilitaram a análise do comportamento desta função pelos alunos e leitura dos seus limites nos extremos e na origem.

Seguindo a sequência das actividades programadas na aula experimental, os alunos foram ganhando habilidades de definição, visualização, manipulação, análise e sobretudo de leitura de limites de funções nos gráficos visualizados. Assim, gradualmente eles foram definindo, visualizando gráficos de funções cada vez mais complicados e lendo nesses gráficos limites em pontos determinados. Assim, com o computador, foi possível que eles visualizassem gráficos de mais de dez funções, o que não seria possível com o quadro e giz.

A rapidez e a perfeição com que os gráficos são construídos e visualizados no computador, por um lado, as facilidades de manipulação tanto das expressões analíticas definidas no computador como as dos respectivos gráficos, por outro, permitiram que os alunos, sem muito auxílio da pesquisadora, compreendessem limites pelo método gráfico no computador.

A aula foi mais dinâmica, porque os alunos puderam modificar expressões analíticas de algumas funções e obtiveram novos gráficos no mesmo sistema cartesiano ortogonal. Isto permitiu comparar resultados e fazer um estudo paralelo de limites de duas ou mais funções diferentes.

Depois da aula pediu-se uma entrevista aos alunos para cada um manifestar o seu sentimento sobre a aula, isto é, se tinha compreendido ou não o conceito de limite de uma função pelo método gráfico usando o computador. Será que a aula experimental ajudou os alunos a entenderem o conceito de limite de uma função? Isto é o que veremos com os resultados da entrevista.

5.2 A avaliação através da entrevista

A entrevista tinha como objectivo avaliar o nível de percepção dos alunos em relação ao conceito de limite.

As perguntas da entrevista foram elaboradas prevendo-se que os alunos podiam responder ou cometer erros que se sintetizam no quadro seguinte.

Os erros possíveis dos alunos foram estabelecidos com base na literatura e na experiência diária do professor na sala de aula.

A tabela 5.1 mostra a resposta que se esperava do aluno, os erros que ele possivelmente iria cometer ao responder uma dada pergunta.

Tabela 5.1 Respostas esperadas/Erros possíveis dos alunos

Perguntas		Resposta esperada do aluno	Erro possível
I		O conceito de limite foi fácil (ou dificil).	
	a)	Quando x decresce $f(x)$ tende para zero.	Quando x decresce $f(x)$ tende para menos infinito.
	b)	$y = 0$ é equação do eixo das abcissas	$y = 0$ é equação do eixo das ordenadas
	c)	$x = 0$ é equação do eixo das ordenadas.	$x = 0$ é equação do eixo das abcissas.
II	a)	x toma valores reais positivos cada vez maiores do que qualquer outro número real positivo por maior que seja.	x é crescente; a função é crescente.
	b)	x toma valores reais negativos cada vez menores do que qualquer outro número real negativo por menor que seja.	x toma valores sempre negativos pequenos; x é decrescente; a função é decrescente.

	c)	Quando x tende para zero o limite da expressão é igual a 1.	Quando x tende para zero o limite da expressão é igual a zero.
III	a)	Não tende para 0,9999...999 é uma afirmação falsa.	Tende para 0,9999...999 a afirmação é verdadeira.
	b)	Não tem por limite 0,9999...999 é uma afirmação falsa.	Tem por limite 0,9999...999 é uma afirmação verdadeira.
	c)	Sim, tende para 1 é uma afirmação verdadeira	Não, não tende para 1 é uma afirmação falsa.
	d)	Sim, tem por limite 1 é uma afirmação verdadeira.	Não, não tem por limite 1; é uma afirmação falsa, o limite é 0,9999...999
IV	a)	O valor da função no ponto $x = 2$ é 2.	O valor da função no ponto $x = 2$ é inferior a dois.
	b)	O limite é igual a 2.	O limite é igual a mais infinito pois a recta $y = 2$ não tem fim. O limite não existe porque à esquerda de 2 x é menor que 2 e à direita é maior do que 2, portanto, diferentes.
	c)	Não.	
	d)	Sim.	$f(x)$ tende para mais infinito.
	e)	Valor do qual a função $f(x)$ se aproxima quando x se aproxima de um valor dado.	É um máximo que a função atinge. Valor no qual a função não toca.
V	a1)	y tende para 1.	y tende para mais infinito. y tende para zero.
	a2)	y tende para 1.	y tende para menos infinito. y tende para zero.
	a3)	y tende para infinito. Não existe limite.	O limite é zero porque quando $x = 0$ $y = 0$.
	b)	Não. Não.	Toca no infinito.
	c)	Assímptota horizontal	linha que separa as duas curvas do gráfico.
VI	a)	y tende para infinito. O domínio é $R\setminus\{1\}$.	y tende para menos infinito; y tende para mais infinito; y tende para zero. O domínio é R.
	b)	x deve tender para 1.	x deve tender para mais infinito.
	c)	Assímptota vertical.	Recta que separa as duas curvas do gráfico.
VII	a)	Introduzir funções racionais no computador, visualizar os gráficos dessas no mesmo sistema cartesiano ortogonal e ler limites em determinados pontos dos gráficos. Manipular os gráficos e analisar limites nos pontos onde a função não está definida e nos ramos menos infinito e mais infinito do eixo real.	Calcular limites com base no computador. Trabalhar com o *software* informático MathGV.

	b)	Construção explícita, rápida e precisa de gráficos. Facilidade de análise do comportamento das funções em diversos pontos do eixo real, facilidade de manipulação (alteração) das expressões analíticas para obter novos gráficos ou novos resultados permitindo comparação entre os resultados já obtidos e os mais recentes.	
	c)		
	d)	Fronteira, barreira, meta, linha de demarcação.	

Análise das respostas dos alunos dadas durante a entrevista

Pergunta I – sobre equações x = 0 e y = 0 do sistema cartesiano ortogonal

Nas alíneas a), b) e c) desta pergunta, pretendia-se que em a) o aluno lesse o limite no gráfico, e em (b) e (c) identificasse os eixos das ordenadas e das abcissas, respectivamente, a partir das equações $x = 0$ e y = 0. Os resultados provam que, em geral, os alunos não só sabem ler o limite de uma função no gráfico como também identificar bem cada eixo a partir das respectivas equações, à excepção de um aluno da escola secundária Francisco Manyanga que confundiu uma com outra, isto é, disse que $x = 0$ é o eixo horizontal e $y = 0$ é o eixo vertical. De facto, todos os alunos entrevistados já tinham aprendido os gráficos apresentados nesta pergunta e as equações das rectas $x = 0$ e y = 0 nos níveis anteriores; por isso, não tiveram dificuldades em responder correctamente à pergunta.

Pergunta II – sobre interpretação dos símbolos $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ e $x \to 0$ e determinação do limite da função $y = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$

As respostas dos alunos a esta pergunta revelam que eles não têm grandes dificuldades em interpretar o significado da expressão "*x tende para mais infinito*" ou "*tende para menos infinito*". Três alunos dos que não tiveram aula com computador responderam que "*x tende para menos infinito*" significa que "*os valores da função são decrescentes tendendo para menos infinito*". Estas respostas mostram que alguns alunos confundem a variação de x para menos infinito (ou para mais infinito) com os valores que a função toma para cada x.

Os três alunos recorreram à substituição de alguns valores de x na expressão 2^x. Depois confrontaram os resultados obtidos com o aspecto do gráfico da função $f(x) = 2^x$, o qual vai 'descendo' (ou 'subindo') à medida que x tende para menos infinito ('ou para mais infinito') sem, contudo, tocar o eixo das abcissas, tendo concluído que à medida que x tende para menos infinito, a função decresce (continua a descer acompanhando o decrescimento de x) para o menos infinito.

Para o caso da alínea c), isto é, "quando x tende para zero, qual é o limite?", os alunos responderam correctamente, afirmando que o limite era igual a 1. Os alunos já estudaram a função exponencial nos níveis anteriores, por isso, não tiveram dificuldades em responder a esta pergunta.

Pergunta III – sobre o conceito de sucessão e de densidade do eixo real

As respostas que se esperavam dos alunos eram comentários acerca dos valores 0,999...9 da sucessão e 1 (um). Era simples para os alunos comentar que a sucessão se aproximava, tendia para ou tinha por limite 1.

Pergunta IV – sobre definição intuitiva de limite de uma função

Como já se referiu nesta pesquisa, o conceito de limite é difícil de ser compreendido pelos alunos (conforme a literatura). Em relação às alíneas a), b), c) e d) desta pergunta, todos os alunos que participaram na aula em que se usou computador responderam correctamente a estas quatro alíneas. Dos restantes alunos um não respondeu as alíneas c) e d). De notar que nesta pergunta os alunos tinham que ler os limites no gráfico. Para a alínea e) nenhum aluno conseguiu explicar *limite de uma função.*

As primeiras quatro respostas da alínea e) são dos alunos que tiveram aula com auxílio do computador e as outras cinco são dos alunos que tiveram aula sem computador.

Respostas dos alunos que tiveram aula com auxílio do computador:

Dário ."*área na qual a função se desenvolve, quando o x é zero o y é uma função tem o valor um*";

Este aluno concebe limite de uma função como "área". Ele vê limite no aspecto geométrico. Quando ele usa a expressão " *na qual a função se desenvolve*", então vê o conceito de limite no aspecto dinâmico.

Sara ."*os pontos que são visíveis no gráfico ... que se podem analisar no gráfico*";

Esta resposta não vai ao encontro da respectiva pergunta.

Cunha . "*limite de uma função é ponto máximo de uma função*";

Este aluno faz uma confusão entre o conceito de limite e o conceito de máximo de uma função.

Célia - "*são os intervalos de minorante e majorante onde a função se desenvolve, isto é, a banda onde a função tende do lado negativo como do lado positivo*";

Para este aluno o conceito de limite está ligado a intervalos onde a função se desenvolve (aspecto dinâmico) mas também numa representação geométrica.

Os alunos que não tiveram aulas em que se usou computador definiram limite de uma função nos seguintes termos:

Pedro - "*limite de uma função seria o valor máximo, o valor máximo que essa função pode atingir*";

Este aluno considera o valor máximo como sendo barreira, fronteira ou uma linha que não pode ser transposta. Ele expressa esta concepção mental (espontânea) para explicar o que é limite de uma função. Neste caso, "valor máximo" seria a linha horizontal y=b (assímptota) que a função pode atingir (valor alcançável, mas não transponível).

Zeca - "*Eu acho que o limite de uma função são valores que, para qualquer x a função nunca toca num determinado valor. Por mais que a função cresça ou decresça, a função nunca chega aquele valor sempre aproxima-se a um determinado valor*".

Este aluno concebe limite como um valor que se aproxima mas que nunca se alcança. Tem um conceito de aproximação reforçado pela ideia de assímptota, movimento (aspecto dinâmico). Mas também considera o limite no quadro numérico e gráfico.

João - "*limite é o valor em que essa função não toca ... aproxima-se, ... é o valor em que um determinado x sendo mais infinito ou menos infinito aproxima-se desse determinado valor mas nunca chega ao tal valor*".

Pode-se também dizer que o aluno considera o limite como um valor do qual a função se aproxima mas que nunca alcança. Tem um conceito de aproximação também reforçado com a ideia de assímptota horizontal, movimento (aspecto dinâmico). Mas também considera o limite no quadro numérico e gráfico.

Filza - "*limite de uma função é o valor aproximado os valores ... os valores que ... os valores nunca chegam a tocar aquele ponto mas aproximam-se quanto mais aumentamos nêh ... o valor nunca chega tocar o tal limite da função*".

Nesta resposta, o aluno deixa expresso o conceito de aproximação, movimento (aspecto dinâmico). Mas também considera o limite no quadro numérico e gráfico.

Inês - " *eu acho que o limite de uma função é valor do qual ... aliás, pode ser o valor máximo que a função atinge, ou é o valor pelo qual começa a ser constante mesmo acrescentando nesse limite começa a crescer para mais infinito ou menos infinito o valor não se altera*".

Este aluno, além de considerar o limite no aspecto estático, tem também a ideia de aproximação (aspecto dinâmico), bem como de limite de uma função uma vez que se refere a crescimento/decrescimento da função sem atingir um determinado valor.

As definições dos estudantes sobre limite de uma função podem ser classificadas da seguinte maneira:

Tabela 5.2 Concepção dos estudantes em relação a limite de uma função

	Concepções dos alunos a respeito de limite de uma função		
	Estática		Dinâmica
	Máximo/Mínimo	Intervalo/área/banda	Aproximação/ movimento
Aula com recurso a computador	Cunha	Célia	Dário
Aula sem recurso a computador	Pedro, Inês		Zeca, João, Filza

Duas respostas dos alunos (Cunha, Célia) entrevistados que tiveram aula de introdução do conceito de limite de uma função usando o método gráfico com o auxílio do computador revelam a tendência de definir limite de uma função no aspecto estático, à excepção da resposta do Dário. A resposta da Sara não foi classificada nesta tabela por não ter ido ao encontro da respectiva pergunta.

Três alunos (Zeca, João, Filza) dos entrevistados que não estiveram presentes nessa aula tentaram definir limite de uma função no aspecto dinâmico, enquanto que dois (Pedro, Inês) tentaram definir limite no aspecto estático. Porém, dos alunos que não estiveram presentes nesta aula experimental, dois tentaram também definir limite no aspecto estático. Esta constatação pode conduzir à afirmação que a concepção dinâmica ou estática de limite de uma função que os alunos revelam nesta pesquisa não dependeu do uso ou não do computador como meio auxiliar de introdução do conceito de limite de uma função.

Estudos feitos por alguns autores tais como Cornu (1980, 1981) e Sierpinska (1987) indicam que uma grande percentagem de alunos têm o que eles chamam de visão estática do conceito de limite. Os alunos que responderam que limite de uma função "é *o valor máximo que essa função pode atingir*" ou "*é ponto máximo de uma função*" podem ser agrupados com os que consideram o limite no aspecto estático, pelo facto de o máximo ser um valor fixo.

O conceito de limite de uma função não só é visto no aspecto estático como também no aspecto dinâmico.

Mutemba (2001a) citando Cornu (1992) faz referência às expressões "aproxima-se, mas nunca toca", "não ultrapassa", "tende para" como conceitos imagem associados com um processo dinâmico de "chegar mais perto de", "aumentar para" ou "avançar sempre". Assim, neste trabalho foram consideradas como concepção dinâmica as seguintes respostas dos alunos:

> *"área na qual a função se* ***desenvolve****", "são os intervalos de minorante e majorante onde a função se* ***desenvolve****", "a função nunca atinge aquele valor, sempre* ***aproxima-se*** *a um determinado valor", "... x sendo mais infinito ou menos infinito a função* ***aproxima-se*** *de um determinado valor mas que nunca chega ao tal valor", "é o valor* ***aproximado*** *... os valores que ... nunca chegam àquele ponto mas* ***aproximam-se****"...*

As concepções estática e dinâmica de limite de uma função são importantes para o entendimento deste conceito.

Pergunta V - sobre leitura de limite no gráfico nos extremos menos infinito e mais infinito e nos pontos de descontinuidade

Dos alunos que tiveram aula com computador como recurso, dois não responderam correctamente às alíneas a_1) e a_2). Estes alunos disseram que o limite é infinito quando x tende para mais infinito, o que mostra que nem todos os alunos presentes na aula experimental compreenderam a leitura de limite no gráfico. Não leram os valores dos limites no eixo das ordenadas, mas sim no eixo das abcissas. Dois dos alunos entrevistados que tiveram aula sem auxílio do computador cometeram também o mesmo tipo de erro.

Na alínea a_3), de todos os entrevistados, apenas um aluno da Escola Francisco Manyanga é que acertou dizendo que não havia limite. Quanto aos restantes, dois responderam que o limite era zero, um aluno afirmou que o limite era um, dois alunos afirmaram que o limite era mais infinito e três que era menos infinito. Os que afirmaram que o limite era mais infinito (ou menos infinito) aproximaram-se mais da resposta certa, em relação aos outros alunos que erraram. Eles leram o limite à direita ou à esquerda do ponto zero onde se pretende determinar o limite em vez de fazê-lo tanto à esquerda como à direita do ponto zero. Isto porque os alunos ainda não sabem determinar limites laterais de uma função, visto tratar-se de uma aula de introdução do conceito de limite de uma função.

Todos os alunos acertaram nas alíneas b) e c). Isto mostra que os alunos têm a ideia de assímptota. Tanto os alunos que tiveram aula com recurso ao computador como os que não tiveram adquiriram o conceito de limite na unidade didáctica *limites de sucessões*, muito em particular quando se estudou o limite da sucessão do termo geral $u_n = \frac{1}{n}$, daí a razão de todos terem acertado.

Pergunta VI – sobre relação entre os pontos de descontinuidade no gráfico com o domínio da função e com a recta vertical definida por esses pontos

Nesta pergunta, todos os alunos que presenciaram a aula em que se utilizou computador responderam que o domínio da função correspondente a este gráfico era o conjunto de todos os números reais, apesar de terem afirmado que o limite, na vizinhança do ponto $x = 1$, era infinito. Um dos alunos que não tiveram aula com auxílio do computador afirmou que a recta $y = 1$ era uma assímptota vertical e a recta $x = 1$ uma assímptota horizontal.

Pergunta VII – sobre o que o aluno aprendeu na aula e as vantagens do uso do computador na aprendizagem de limites

As alíneas a), b) e c) desta pergunta foram formuladas para os alunos que tiveram aula com o computador como recurso e foram perguntas abertas no sentido de dar o seu ponto de vista sobre aquilo que tinham aprendido sobre limites usando o computador. Duma maneira geral os alunos afirmaram ter sentido algumas dificuldades em introduzir expressões analíticas de funções no computador, pois era necessário adaptar as expressões à sintaxe do *software* MathGV. Por exemplo, "x^2" tinha que ser escrito "*x^2*". Porém, alguns alunos já sabiam trabalhar com o computador como usuários.

A pergunta para todos consistia em explicar limite no contexto não-matemático. Alguns alunos explicaram limite como sendo uma **barreira** intransponível, não alcançável embora se possa aproximar dela. Estão evidentes nessas definições ideias de movimento, de aproximação e estática. Relacionando esta pergunta com a quatro, em que se pedia aos alunos para sugerirem uma definição de limite, a mesma ideia que exteriorizaram naquela pergunta ficou expressa também nas respostas a esta pergunta, reflectindo a sua experiência diária no tocante ao conceito de limite.

Analisando a tabela 5.2 nota-se que, no contexto não matemático, os alunos Cunha, Pedro e João tentaram explicar limite como sendo um valor máximo ou mínimo que a função pode alcançar; os alunos Dário, Sara, Célia, Filza e Inês procuram afirmar que o limite de uma função é intransponível e o aluno Zeca explicou limite em termos de valor aproximado. A explicação de cada aluno em relação à pálavra *limite* tanto no contexto não matemático como no matemático não é muito diferente.

As ideias dos primeiros dois grupos de alunos reflectem que atribuem ao limite de uma função o significado matemático de assímptota (valor do qual a função se aproxima ...), não explicando, contudo, o caso particular em que o limite de uma função não existe ou o caso em que o limite é infinito. Pode-se então observar que estes alunos, ao tentar explicar limite de uma função, procuram relacionar este conceito matemático abstracto com a ideia quotidiana de fronteira, barreira ou obstáculo que não deve ser transposto por mais que se queira.

Tabela 5.3 Comparação das respostas dos alunos sobre limite no contexto matemático e não matemático

Aluno	Respostas dos alunos	
	Contexto matemático	**Contexto não matemático**
Dário	Área na qual a função se desenvolve, quando o x é zero o y é uma função que tem o valor um.	Limite é a banda na qual a função se desenvolve, é o intervalo em que a função nunca chega a tocar ah ...
Sara	Os pontos que são visíveis no gráfico ... que se podem analisar no gráfico.	Eu diria que o limite é como o chão, a gente nunca passa dele podemos tocar lá e tudo, mas para passar dele a gente não passa.
Cunha	Limite de uma função é o ponto máximo de uma função.	Limite quer dizer que existe um ponto máximo e um ponto mínimo.
Célia	São os intervalos de minorante e majorante onde a função se desenvolve, isto é, a banda onde a função tende do lado negativo como do lado positivo.	Limite é o ponto onde nós podemos parar. Por mais que percorramos quilómetros e quilómetros aquele é o ponto que devemos parar... é o limite.
Pedro	Limite de uma função seria o valor máximo, o valor máximo que essa função pode atingir.	Limite eu diria como sendo o ponto máximo de qualquer coisa sendo a margem de qualquer situação que estamos a analisar.
Zeca	Eu acho que o limite de uma função são valores que, para qualquer x a função nunca toca num determinado valor. Por mais que a função cresça ou decresça, a função nunca chega àquele valor sempre se aproxima a um determinado valor.	Eu diria à pessoa que o limite é uma referência... digo, por exemplo, no quadro, perto do quadro, não digo que é exactamente no quadro... pode ser perto do quadro. O limite é um valor no qual pode não ser aquele valor exacto mas ser um valor aproximado a esse tal valor.
João	Limite é o valor em que essa função não toca ... aproxima-se, ... é o valor em que um determinado x sendo mais infinito ou menos infinito se aproxima desse determinado valor mas nunca chega ao tal valor.	O limite é um ponto ou um local máximo que esteja aproximado a qualquer coisa ou objectivo final.
Filza	Limite de uma função é o valor aproximado, os valores ... os valores que ... os valores nunca chegam a tocar aquele ponto mas aproximam-se quanto mais aumentamos nêh ... o valor nunca chega a tocar o tal limite da função.	Limite seria um determinado local ... aproxima-se do limite ... aproxima-se desse tal valor ou objecto mas nunca chega a atingir.
Inês	Eu acho que o limite de uma função é o valor do qual ... aliás, pode ser o valor máximo que a função atinge, ou é o valor pelo qual começa a ser constante mesmo acrescentando nesse limite começa a crescer para mais infinito ou menos infinito o valor não se altera.	Limite seria um local onde as coisas são possíveis mas não chega a atingir esse local. O limite atingimos o local só que não ultrapassa esse tal local.

No contexto não matemático, eles procuram explicar a palavra limite evidenciando a ideia quotidiana de local onde as pessoas devem parar. Isto é, nesse local, existe um obstáculo que se pode tocar ou aproximar-se dele mas não pode ser transposto. Assim, no contexto não matemático, as concepções dos alunos em relação à palavra "limite" mostram que este conceito está estritamente ligado à ideia de movimento de entes ou objectos (aspecto dinâmico) em direcção a um obstáculo, barreira ou fronteira existente ou edificado num determinado local. Esta forma de conceber o conceito de limite é funcional no contexto em que vivem os alunos, mas que não tem o mesmo significado no contexto matemático.

O Zeca explicou a palavra limite em termos de valor do qual se pode aproximar. Contudo, à semelhança dos dois primeiros grupos dos alunos, ele depois compara limite com um obstáculo (o quadro usado na sala de aula) que pode ser tocado mas não transposto.

Em geral, todos os alunos entrevistados explicaram a palavra limite, no contexto não matemático, como sendo ou um obstáculo (assímptota) ou valor (máximo/mínimo).

No contexto matemático, o grupo constituído por (Dário, Sara, Cunha e Célia) que estiveram presentes na aula de introdução do conceito de limite pelo método gráfico (aula de aula experimental) explicou limite de uma função evidenciando as palavras *intervalo*, *área* e *banda onde a função se desenvolve*. Os restantes alunos entrevistados (Pedro, Zeca, João, Filza e Inês), os quais não estiveram presentes na aula experimental, explicaram a palavra limite em termos de *valor aproximado* [máximo/mínimo] que uma função pode alcançar sem contudo o transpor. Este grupo de alunos explica a palavra limite em termos algébricos (valor aproximado) enquanto que o primeiro explica-a em termos gráficos (área, banda ou intervalo *onde a função se desenvolve*). Estes dois tipos de pensamento em relação ao conceito de limite mostram que os alunos aprenderam este conceito segundo métodos diferentes: método gráfico no primeiro caso e método algébrico no segundo. Uma vez que se trata de uma aula introdutória do conceito em que não se fez a avaliação do seu desempenho, acha-se prematuro afirmar se os dois grupos de alunos compreenderam efectivamente o conceito.

Alguns autores como Tall & Vinner (1981) e Williams (1991) consideram que a concepção dinâmica de limite que os alunos sustentam é o que os impede de compreender o conceito de limite em termos formais. Contudo, Davis & Vinner, citados por Ervynck (1981), são de opinião que a grande dificuldade surge na construção dinâmica do conceito de limite de uma função e esta dificuldade é um obstáculo na compreensão do conceito de limite pelos alunos. Tall & Vinner (1981) afirmam que neste processo dinâmico é necessário que os alunos possuam um domínio de uso de quantificadores. Ervynck (1981) afirma que, infelizmente, por evidências tal domínio não existe nos alunos. No ensino do conceito dinâmico de limite é preciso considerar este aspecto.

Relativamente ao domínio do uso de quantificadores pelos alunos abrangidos por esta pesquisa, pode-se afirmar que eles não possuem o tal domínio, uma vez que, segundo o programa curricular de ensino, este conteúdo é da 10ª classe do ramo de letras. Porém, esta pesquisa abrangeu alunos do curso de ciências em que não se ensina este conteúdo.

Na aula com recurso ao computador usando o quadro gráfico, o conceito de assímptota foi um dos mais evidenciados pela natureza das funções definidas no computador. Daí que as explicações da palavra limite tendem a evidenciar o conceito de assímptota.

O uso do computador permitiu motivar os alunos e eles analisaram todos os gráficos de funções racionais previstos no plano de aula e outros da sua iniciativa lendo os respectivos limites no gráfico.

No entanto as entrevista dos alunos, que também envolveram alguns alunos que não tinham participado na aula de intervenção mostrou que em termos de leitura de limite no gráfico não houve diferença de aprendizagem entre estes dois grupos de alunos. Contudo, conforme a tabela 5.2 parece haver uma diferença de concepções. Os que participaram na aula experimental conceberam limite em termos estáticos, isto talvez porque o computador visualizou-lhes gráficos já construidos enquanto que os que não participaram naquela aula revelaram uma concepção dinâmica de limite de uma função por terem desenhado manualmente os gráficos. Esta diferença não pode ser generalizada uma vez que o número de alunos entrevistados não foi grande.

As conclusões e recomendações desta pesquisa são tratadas no capítulo VI.

Capítulo VI – Conclusões, limitações e recomendações

6.1 Conclusões

Nas escolas secundárias moçambicanas os professores de Matemática da 12ª classe, segundo a análise dos cadernos recolhidos, o conceito de limite de uma função é introduzido de diferentes maneiras. Em alguns cadernos a introdução é feita a partir de uma sucessão, através de ponto de acumulação e definição em linguagem simbólica ε / δ onde se procura também explicar o significado da notação $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Alguns professores explicam nos questionários o significado desta notação não só através da linguagem ε / δ como também através de um esboço de porção de gráfico que inclui a localização dos pontos a e b e os números δ e ε.

A partir das observações feitas foi planificada uma aula de experimentação visando introduzir o conceito de limite de uma função pelo método gráfico com o auxílio do computador. Da sessão de experimentação verificou-se o empenho dos alunos na realização das actividades, as suas habilidades em termos de definição de expressões analíticas de funções no computador, análise dos gráficos visualizados, leitura de limites nesses gráficos; notou-se também que volume de actividades que por eles realizadas nessa sessão não teria sido possível se fossem usados apenas o quadro e o giz.

Depois de introduzido o conceito de limite de uma função, nota-se poucos exercícios ligados com a introdução deste conceito. Os professores dão aos alunos muitos exercícios de cálculo de limites e levantamento de indeterminações, de expressões notáveis aplicando regras, procedimentos ou algoritmos matemáticos.

6.2 Respostas às perguntas de investigação

Tratando-se de uma aula introdutória não foi possível que eles aprendessem as várias técnicas de leitura de limites no gráfico de funções mais complexas. Depois desta aula os alunos conceberam o computador como sendo um instrumento útil para a aprendizagem de limites sobretudo pela visualização gráfica.

No método gráfico, os gráficos devem ser desenhados com perfeição de modo a permitir que os alunos sejam capazes de ler limites em pontos determinados ou nos ramos menos infinito e mais infinito do gráfico. Com aqueles esboços dos cadernos que a pesquisa analisou não era fácil fazer este tipo de exercício. Contudo, a construção à mão de gráficos perfeitos consome tempo e requer habilidade e precisão. O uso de um programa de computador desenhado para o estudo de limites de funções ou de gráficos de funções pode ser muito útil para introduzir o conceito de limite de uma função pelo método gráfico, pois os gráficos são construídos rapidamente e com perfeição. A rapidez e a perfeição com que os gráficos são construídos é uma vantagem pois muitos exemplos podem ser dados num intervalo de tempo reduzido. Contudo, é necessária uma estruturação lógica das actividades dos alunos e uma aprendizagem prévia do programa de computador a ser usado pelos alunos na introdução do conceito de limite de uma função. A respeito do uso do computador, a pesquisa implementou um plano de lição em que foi usado o método gráfico com a ajuda do computador para introduzir o conceito de limite de uma função. Apesar das vantagens que o computador ofereceu na aula experimental, os alunos não adquiriram do computador a habilidade manual de construção dos gráficos das funções preconizadas no plano de aula. Durante a aula experimental alguns alunos mostraram maior entusiasmo em aprender técnicas de definição de funções no computador que aprender a ler limites nos gráficos visualizados. Contudo, o computador foi muito útil pois permitiu construir os gráficos de todas as funções sugeridas na experimentação e analisar os limites nos pontos recomendados.

Em relação à primeira pergunta de investigação:

1. Uma intervenção que consiste na introdução do conceito de limite pelo método gráfico e usando o computador poderá ajudar os alunos a melhorar a aprendizagem deste conceito?

A introdução do conceito de limite pelo método grafico usando o computador ajudou o aluno a introduzir as funções no computador e a manipular os gráficos visualizados. Esta visualização ajudou os alunos a compreender o conceito de assímptota, um conceito que já tinham sido ensinados nas aulas anteriores, porém não tinham compreendido. Por exemplo, a intervenção ajudou os alunos a ler limites no gráfico da função racional $f(x)=\frac{1}{x}$ na vizinhança do ponto $x=0$, quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$. O computador é um meio que induz o aluno à motivação despertando o seu interesse ou curiosidade em aprender, neste caso, cada vez este conceito atravéz da visualização ao mesmo tempo que ele (com mais treino) vai descobrindo técnicas informáticas de leitura de limites no gráfico e solução de problemas relacionados com limites de funções mais complexas.

No que diz respeito à segunda pergunta de pesquisa:

2. Que concepções poderão prevalecer nos alunos depois desta intervenção?

Depois da interveção, foram entrevistados quatro alunos. Alguns depois da intervenção mantêm o seu pensamento quotidiano sobre limite, por exemplo, *barreira, fronteira*, *banda*, *obstáculo*, que se pode alcançar mas não pode ser transposto. Porém, houve outros que exteriorizaram a ideia de aproximação do gráfico a uma linha que não pode ser alcançada (assímptota) ou movimento do gráfico ou aproximação dos valores da função em relação a um certo valor numérico (limite). O computador ajudou o aluno a transitar do conceito de limite como barreira para o conceito abstracto de aproximação de valores de uma função de outro valor (numérico) chamado limite.

6.3 Limitações

A intervenção apenas envolveu alunos da turma de um único professor;

Não foram entrevistados todos alunos que estiveram presentes na intervenção.

O tempo da entrevista não foi suficiente para se entrar em pormenores. Se houvesse tempo suficiente, talvez as respostas dos alunos conduzissem a resultados mais aprofundados.

6.4 Recomendações

Recomendações aos professores

Recomenda-se aos professores que:

- façam uso de diferentes quadros ou representações de uma forma combinada no ensino do conceito de limite de uma função para permitir que os alunos aprendam a resolver de várias maneiras problemas relacionados com limites de funções.
- Usem mais o método gráfico e não se limitem a resolver exercícios meramente algébricos.

Recomendações aos pesquisadores

Recomenda-se aos pesquisadores que:

- investiguem outras alternativas de introdução do conceito de limite de uma função que podem ajudar os alunos a compreender com facilidade este conceito;
- investiguem que dificuldades os professores de Matemática da 12ª classe encontram no processo de ensino de limites.
- pesquisem (por exemplo na *internet*) alguns programas de computador que podem ser usados nas escolas secundárias para melhorar o ensino e aprendizagem de limites;
- nas escolas onde não existem laboratórios de informática elaborem e testem materiais didácticos da sua iniciativa para melhorar o ensino de limites.

Bibliografia

Ávila, G. (1998). *Introdução ao Cálculo.* LTC, Ed. S.A., Rio de Janeiro, Brasil.

Bishop, A. J. et al. (1996). *International Handbook of Mathematics Education*, (pp. 469-501). Mathematics Education and Culture Computers Based Learning Environments. (Educational Studies in Mathematics, Vol 9, No2), Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Carvalho, J. (1988). Os Computadores e o ensino da análise elementar. In www.mat.uc.pt/~jaimecs/nonius/nonius_14_1.html. *Folha Informativa do Projecto "Computação no Ensino da Matemática"* . ISSN 0870 - 7669.

Cornu, B. (1980). Interference des modèles spontanés dans l'apprentissage de la notion de limit. In *Seminaire de Recherche Pédagogique*, 8, (pp.57-83). Institut National Polytecnique de Grenoble. France.

Cornu, B. (1981). Quelques obstacles a l'apprentissage de la notion de limite (Some obstacles to learning the concept of limit). *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4, (pp.236 – 268). France.

Cornu, B. (1982). Grandes lignes de l'évolution historique de la notion de limite, A.P.M.E.P., (335), (pp.627-641).

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions et Obstacles.* Thèse de doctorat de troisième cycle de Grenoble. Université Scientifique et Médicale. France.

Cornu, B. (1992). In Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.153 – 166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Davis, B. R. (1986). The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. *Journal of Mathematical Behavior*, 5 (3), (pp. 281 – 303).

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil objet. In *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2) (pp. 5-31). Grenoble : La Pensée Sauvage. France.

Ervynck, G. (1981). Conceptual difficulties for first year University students in the acquisition of the notion of limit of a function. In *Actes du cinquième colloque du Groupe International PME* (pp. 330 – 333) Grenoble France.

Espinosa, L. & Azcárate (1995). *A study on Secondary Teaching System about the Concept of Limit. Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of the Mathematics Education.* PME IXX, (2), (pp.11-17). Recife, Brasil.

Hoffmann, D. & Bradley, L. (1996). *Calculus for Business, Economics, and Social Sciences*, Sixth edition. Boston. McGraw Hill. USA.

Huillet, D. & Mutemba, B. (1999). Institutional Relation to a Mathematical concept, The case of limits functions in Mozambique. In J. Kuiper (ed.), *Proceedings 7th Annual Meeting SAARMSE Conference*: 309-316. Harare, Zimbabwe.

Huillet, D. & Mutemba, B. (2000). The Relation of Mozambican Secondary School Teachers to a Mathematical Concept: The Case of Limits of Functions. (3), (pp.65-70) *Proceedings of the 24th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Hiroshima University, Japan.

Huillet, D. (2001). *A mudança de quadros: O caso das inequações.* Tema de Seminário de capacitação de professores de Matemática, Bilene 18-22 de Julho de 2001 (pp.1-3)

Iezzi, G., Murakami, C., Hazzan, S. & Pompeu, J.N.(1985). *Fundamentos de Matemática Elementar. Limites , Derivadas, Noções de Integral.* São Paulo, Brasil.

Janvier, C. (1987). Representations and understanding: The notion of functions as an example. In Janvier, C (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem – solving.* Hillsdale ,NJ: Lawrence Erlbaum.

Li, L. & Tall, D. (1993). *Constructing Different Concept images of Sequences and Limits by Programming, Proceedings of the 17th International conference for the Psychology of Mathematics Education,* (2), (pp.41- 48), Tsukuba, Japan.

Monaghan, J. (1991). *Problems with the Language of limits for the Learning of Mathematics*, 11 (3), (pp.20 – 24). Warwick University, England.

Monaghan, J. Sun, S. Tall, D. (1994). *Constructing of the Limit Concept With a Computer Algebra System. Proceedings of the 8th International conference for the Psychology of Mathematics Education,* (3), (pp.279-286), Lisbon, Portugal.

Mutemba, B. (2001). The Mozambican students' Understanding of the Concept Limit of a Function: A Case Study. *A research report submitted to the Faculty of Science*, University of the Witwatersrand, Johannesburg, RSA.

Ministério da Educação - Mined (1997). *Programa de Matemática do ensino secundário, 2° ciclo.* Maputo, Moçambique.

Protter, M. & Morrey, B. (1977). *Calculus With Analytic Geometry. A first course.* Third Edition Addison-Wesley Publishing Company. University of California, Berkeley, USA.

Schwarzenberger, R. & Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching* (82), (pp.44 – 49).

Sierpinska, A. (1985). Obstacles Epistemologiques relatifs a la notion de limite. In *Recherches en Didactique des mathématiques*, 6 (1), (pp.5 – 67). la pensée Sauvage, Grenoble. France.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics,* (18) (pp.170- 176).

Tall, D. & Vinner, S. (1981). In Tall, D. (Ed.), Advanced Mathematics Thinking. Concept image and concept definition in Mathematics with particular Reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* (12), (pp.151-169). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.495 – 511). New York: Macmillan. Publishing Company

Trouche, L. & Guin, D. (1999). The complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments : The case of calculators, *International Journal of computers for mathematical learning,* 3 (3), (pp.195-227). Hiroshima University, Japan.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal Research in Mathematics Education* 22 (3), (pp.219 – 236).

Índice de anexos

Conteúdo **Página**

Anexo I

Guião de consulta aos professores

Anexo I

Guião de consulta aos professores

Os dados recolhidos neste questionário serão usados apenas para o melhoramento do processo de ensino e aprendizagem do conceito de limites de funções.
Toda a informação prestada neste questionário será tratada confidencialmente e servirá apenas para efeitos desta pesquisa.

Escola: ______________________

Tópico: **Várias alternativas de introdução do conceito de "limite de uma função" na escola.**
Anos de experiência no ensino deste conceito: __________

I - Métodos de Introdução do conceito "limite de uma função"

1. Das seguintes alternativas de introdução do conceito de limite, qual/quais é que utiliza? Marque com um **(x)**
   - a) Geométrico ☐
   - b) Algébrico ☐
   - c) Númerico ☐
   - d) Gráfico ☐

   Porquê? Comente.

Utiliza alguma definição? (Sim/Não) _______ Porquê?
Caso afirmativo apresente-a.

2. Utiliza a representação gráfica? (Sim/Não) _______ Porquê?

3. Dê exemplo de gráficos que tem usado para explicar este conceito.
   Utilize a folha em anexo
4. Tem utilizado outras formas de introdução do conceito? (Sim/Não) _______
5. Caso afirmativo, comparando as várias formas de introdução do conceito em qual delas é que os seus alunos aprendem com mais facilidade o conceito? E quais?
6. O que poderia estimular a aprendizagem dos alunos, ou ajudá-los a compreender o conceito?
7. O conceito de limite ajusta-se bem a esta classe? (Sim/Não) _______ Explique a sua resposta.
8. Acha indispensável ensinar o conceito de limite de uma função a partir da definição na 12ª Classe? (Sim/Não) _______ Porquê?

II - Relativamente ao programa de ensino

1. O conceito de limite de função é introduzido no segundo semestre da 12ª classe. Acha este posicionamento adequado? (Sim/Não) _______ Comente a sua resposta.
2. Os objectivos, os conteúdos e as orientações metodológicas do programa, relativamente à unidade temática "limites de funções", permitem que os professores ensinem este conceito aos seus alunos? (Sim/Não) _______ Comente a sua resposta.

____
____

3. A carga horária atribuida à unidade didáctica "limites de funções" é suficiente para os professores cumprirem o programa e os alunos compreenderem este conceito? (Sim/Não) ______ Comente.

____
____
____
____

III - Aprendizagem do conceito "limite de uma função" pelos alunos

1. Qual é o seu sentimento relativamente ao grau de aprendizagem dos alunos? Comente (motivação – os alunos estão motivados, mostram interesse gostam da matéria)? (assimilação do conceito – os alunos compreendem o conceito)?

____
____
____
____

2. Os alunos sabem interpretar geometricamente e numericamente o limite de uma dada função? (Sim/Não)______

3. Caso **Não**, o que deve ser feito para que tal seja conseguido?

____
____
____
____

IV - Comentários adicionais sobre o ensino e aprendizagem do conceito "limite de uma função"

____
____
____
____

Anexo II

Guião de entrevista dos alunos da Escola Secundária Francisco Manyanga e do Colégio Kitabu

Anexo II

Guião de Entrevista aos alunos da Escola Secundária Fancisco Manyanga e do Colégio Kitabu

Data da entrevista: 27 - 06 - 2003

Locais da entrevista: Escola Secundária Francisco Manyanga e Colégio Kitabu

Tópico: O conceito de limite de uma função

Entrevistadora: Constância António Devesse

I. O conceito de limite que aprendeu foi fácil ou difícil? Observe a fig.1 na folha que lhe foi entregue.

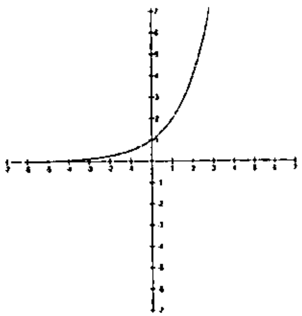


Fig.1

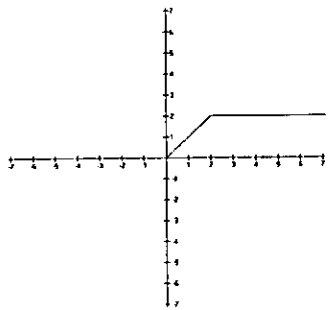


Fig.2

a) À medida que x decresce os valores de $f(x)$ aproximam-se de____

b) Indique o eixo que corresponde a $y = 0$

c) Indique o eixo que corresponde a $x = 0$

II. Considere a expressão $\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$

O que significa $x \to +\infty$?

b) Explique por suas próprias palavras $x \to -\infty$.

c) $x \to 0$ (x tende para zero). Qual é o limite?

III. O que pensa sobre as seguintes afirmações?

A sucessão de números reais 0.9; 0.99; 0.999; 0.999...9;...

a) Tende para 0.9999...999;

b) Tem por limite 0.999...999;

c) Tende para um;

d) Tem por limite um.

IV. Observe a fig.2.

a) Qual é o valor da função no ponto x = 2

b) Qual é o limite da função quando $x \to 2$

c) Será que $f(x)$ tende para dois quando x tende para zero?

d) Será que $f(x)$ tende para dois quando x tende para dois?

e) Sugira uma definição para limite de uma função.

V. Observe os gráficos das fig.3 e fig.4

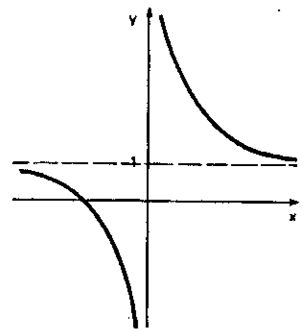


Fig.3

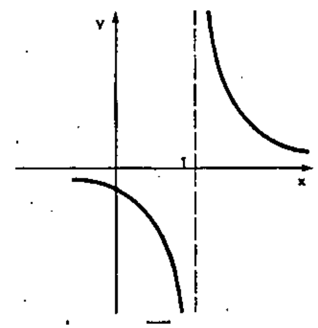


Fig.4

a) Observe a figura 3

a_1) Quando $x \to +\infty$, para que valores tende y?

a_2) Quando $x \to -\infty$, para que valores tende y?

a_3) Quando $x \to 0$, para que valores tende y?

b) O gráfico toca a recta $y=1$? E se prolongarmos o gráfico será que vai tocar a recta?

c) Sugira um nome para a recta $y = 1$.

VI. Observe a figura 4

a) O que acontece quando $x \to 1$? Qual é o domínio?

b) Relativamente ao gráfico da fig.4 para que valor deve tender x de modo que seja o limite de $f(x) = \infty$ $(\lim f(x) = \infty)$?

c) Sugira um nome para a recta $x = 1$.

VII.

a) O que aprendeu sobre limite de uma função utilizando o computador?

b) Quais são as vantagens e desvantagens do uso do computador (pacote Mathgv) para o estudo de limite de funções?

c) O que foi fácil/difícil quando se usou o computador na sala de aula?

d) O que é que significa a palavra "limite"? Suponha que uma pessoa que não sabe nada de Matemática lhe pergunta o que significa limite, que resposta daria a essa pessoa?

Anexo III

Guião do propósito de cada pergunta

Anexo III

Guião do propósito de cada pergunta da entrevista

Pergunta I

I. O conceito de limite que aprendeu foi fácil ou difícil?

Observe a Fig.1 na folha que lhe foi entregue.

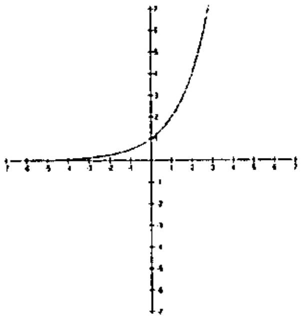


Fig.1

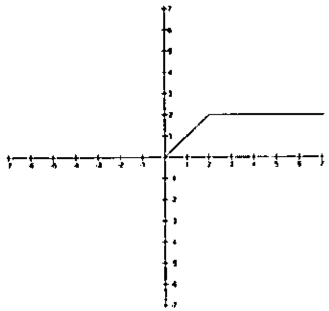


Fig.2

a) À medida que x decresce os valores de $f(x)$ aproximam-se de____

b) Indique o eixo que corresponde a $y = 0$

c) Indique o eixo que corresponde a $x = 0$

A primeira parte da pergunta I, antes das alíneas a), b) e c), foi concebida apenas para iniciar o diálogo com o aluno e criar um ambiente motivador relativamente à entrevista.

A segunda parte desta pergunta, que compreende à Fig.1 e às alíneas a), b) e c), tinha como objectivo avaliar se o aluno conhece as equações dos eixos das abcissas e das ordenadas.

Pergunta II

Considere a expressão $\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$

a) O que significa $x \to +\infty$?

b) Explique por suas próprias palavras $x \to -\infty$.

c) $x \to 0$ (x tende para zero). Qual é o limite?

Com esta pergunta pretendia-se avaliar se o aluno sabe interpretar os simbolos $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ e $x \to 0$ e se sabe determinar o limite da função.

Pergunta III

O que pensa sobre as seguintes afirmações? A sucessão de números reais 0,9; 0,99; 0,999; 0,999...9; ...

a) Tende para 0,9999...999

b) Tem por limite 0,9999...999

c) Tende para um

d) Tem por limite um

Esta pergunta está relacionada com o conceito de sucessão e de densidade do eixo real. Quando se fala de sucessão, para muitos alunos, trata-se de uma sequência de números inteiros ou de números naturais, ignorando o facto de que esses termos podem ser outros números reais tais como dízimas finitas ou infinitas. As alineas a), b), c) e d) tinham também como objectivo pôr o aluno a reflectir sobre o seguinte aspecto: existirão dois números consecutivos no conjunto dos números reais? Por exemplo, qual é o número real que ocorre antes de 1? Depois desta reflexão, a pergunta pretende explorar até que ponto este consegue distinguir o significado da expressão "**tende para** ..." do da expressão "**tem por limite** ...".

Pergunta IV

Observe a Fig. 2.

a) Qual é o valor da função no ponto $x = 2$?

b) Qual é o limite da função quando $x \to 2$?

c) Será que $f(x)$ tende para dois quando x tende para zero?

d) Será que $f(x)$ tende para dois quando x tende para dois?

e) Sugira uma definição para limite de uma função.

O objectivo desta pergunta era conduzir o aluno à definição intuitiva de limite de uma função apoiando-se também sobre perguntas anteriormente feitas.
Os alunos, nesta pergunta, tinham que determinar o limite de uma função em que, num dos intervalos, era constante e no outro não. A partir daí deveriam definir, ou pelo menos explicar, por suas próprias palavras, o limite de uma função.

Pergunta V

Observe os gráficos das Fig. 3 e Fig. 4

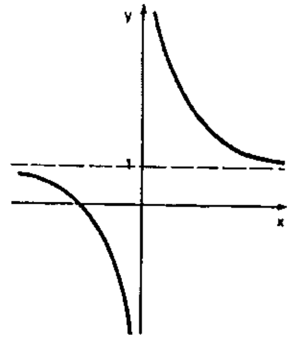


Fig.3

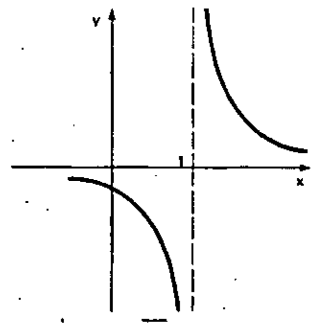


Fig.4

a) Observe a Fig. 3
   - a₁) Quando $x \to +\infty$, para que valor tende y?
   - a₂) Quando $x \to -\infty$, para que valor tende y?
   - a₃) Quando $x \to 0$, para que valor tende y?

b) O gráfico toca a recta $y=1$? E se prolongarmos o gráfico será que vai tocar a recta?

c) Sugira um nome para a recta $y = 1$.

Esta pergunta visava explorar os conhecimentos dos alunos sobre a leitura de limite no gráfico nos extremos menos infinito e mais infinito e nos pontos de descontinuidade. As

equações das rectas $x = 0$ e $y = 0$ foram referidas na Pergunta I. Nesta pergunta, desejava-se evidenciar que $y=1$ é a equação de uma recta horizontal chamada assimptota, nome que os alunos deveriam mencionar.

Pergunta VI

Observe a Fig. 4

a) O que acontece quando $x \to 1$? Qual é o domínio?

b) Relativamente ao gráfico da fig.4 para que valor deve tender x de modo que seja o limite de $f(x) = \infty$ $(\lim f(x) = \infty)$?

c) Sugere um nome para a recta $x = 1$?

Os alunos não apresentam muitas dificuldades em determinar o domínio de uma expressão algébrica. Nesta pergunta desejava-se saber se os alunos seriam capazes de relacionar os pontos de descontinuidade no gráfico com o domínio da função, por um lado, e com a recta vertical definida por esse ponto, por outro. Tal como na Pergunta V, os alunos deveriam sugerir o nome da recta que passa no ponto de descontinuidade $x = 1$ (assimptota vertical, neste caso).

Pergunta VII (alíneas a), b) e c) só para alunos do Colégio Kitabu e a d) para todos)

a) O que aprendeu sobre limite de uma função utilizando o computador?

b) Quais são as vantagens e desvantagens do uso do computador (pacote MathGV) para o estudo de limite de funções?

c) O que foi fácil/difícil quando se usou o computador na sala de aula?

d) O que é que significa a palavra "limite"? Suponhamos que uma pessoa que não sabe nada de Matemática lhe pergunta o que significa limite, que resposta daria a essa pessoa?

Pretendia-se com as alíneas a), b) e c) desta pergunta a avaliação pelo aluno da aula em que se utilizou o computador: o que ele aprendeu e as vantagens do uso do computador na aprendizagem de limites. A alínea d) era para o aluno expressar a sua concepção em relação à palavra "limite" usada na vida quotidiana.