



UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**UMA APROXIMAÇÃO ASSIMPTÓTICA DO FLUXO
DE STOKES DE UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL EM
UM TUBO FINO**

Eisten Daniel Neto Bomba

Maputo, 2024

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA APROXIMAÇÃO ASSIMPTÓTICA DO FLUXO
DE STOKES DE UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL EM
UM TUBO FINO

Eisten Daniel Neto Bomba

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Eduardo Mondlane, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Supervisores:

Professor Doutor Peter Wall e Prof. Doutor John Fabricius

Co-Supervisor: Mestre Salvador Manjate

Maputo, 2024

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA APROXIMAÇÃO ASSIMPTÓTICA DO FLUXO
DE STOKES DE UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL EM
UM TUBO FINO

Eisten Daniel Neto Bomba

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Eduardo Mondlane, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em _____, por:

Profa. Doutora Elena Vladimirovna Alves
(Arguente-Instituto Superior de Ciências e
Tecnologia de Moçambique)

Professor Doutor Peter Wall
(Supervisor-Universidade de Tecnologia de
Luleå, Suécia)

Prof. Doutor Sansão Agostinho Pedro
(Presidente-Universidade Eduardo Mondlane,
Moçambique)

Prof. Doutor John Fabricius
(Supervisor-Universidade de Tecnologia de
Luleå, Suécia)

Mestre Salvador Manjate
(Co-Supervisor-Universidade Eduardo Mon-
dlane, Moçambique)

Maputo, 2024

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Objectivos da pesquisa	3
1.2	Importância do estudo	3
1.3	Materiais e Métodos	4
1.4	Organização do trabalho	5
2	Equações do movimento	7
2.1	Descrição do movimento do fluido	7
2.2	Elementos da teoria de campo	8
2.3	Teorema de transporte	9
2.4	Equação de continuidade	11
2.5	Equação do momento	12
2.6	Fluido newtoniano	14
3	Formulação do modelo	17
3.1	Geometria do problema	17
3.2	Análise dimensional	18
3.2.1	Equações de Navier-Stokes na forma adimensional	19
3.2.2	Redimensionamento do sistema de Stokes	20
3.3	Condições de fronteira	22
4	Método de expansão assintótica	23
4.1	Fluxo de Stokes no domínio fino	23
4.2	Expansão assintótica	24
4.3	Análise das equações	26
4.3.1	Equação do momento	26
4.3.2	Conservação do volume	28
4.4	Função permeabilidade	29
4.5	Lei de Poiseuille e equação de Reynolds	32
5	Problema aproximado	35
5.1	Termos complementares	35

5.2	Correção de divergência e problema aproximado	46
6	Resultados, conclusões e recomendações	51
6.1	Resultados	51
6.2	Conclusões e recomendações	53

Dedicatória

Dedico esta dissertação à minha família, em especial a minha esposa Fátima Jorge Rofino e aos meus filhos: Sleyd Bomba, Eisten Bomba Júnior e Marcelo Bomba.

Agradecimentos

De modo a concretizar este trabalho, houve colaboração de diversas individualidades e colectivos pelo que gostaria antes de tudo gratificar por tudo que fizeram para sua concretização.

Agradeço a Deus todo Poderoso, criador de todo conhecimento, por me ter dado força e saúde para suportar e superar todas as dificuldades passadas esse anos, em especial durante a elaboração da dissertação.

- Aos meus supervisores Prof. Doutor John Fabricius e Professor Doutor Peter Wall pela paciência, disponibilidade, por valiosas críticas e sugestões durante o desenvolvimento da dissertação. Agradeço também ao meu incansável co-supervisor Mestre Salvador Manjate pelo encorajamento e pelos seus contributos nessa dissertação.
- Ao Prof. Doutor Sansão Pedro pela disponibilidade e paciência que sempre apresentou na qualidade de Director do curso de Mestrado em Matemática. Agradeço ainda pelos seus conselhos e ensinamentos num dos momentos mais críticos da minha vida pessoal.
- Aos meus colegas docentes do Departamento de Matemática e Informática (DMI), pelo apoio moral e científico durante esta caminhada.
- À minha esposa Fátima Jorge e aos meus filhos, pela compreensão e carinho durante este período no qual não pude dedicar-lhes a devida atenção.
- Aos meus companheiros, amigos e colegas do curso e dentre tantos outros que permanecerão em minha memória e sem me esquecer daqueles que directa ou indirectamente estiveram sempre comigo.
- Aos professores das universidades parceiras pelo apoio prestado ao nosso programa de mestrado: A Universidade de Porto através do apoio da Fundação *Calouste Gulbenkian* e as Univerdades Suecas e Sul Africanas através do apoio do subprograma *Nr 1.4.2: Capacity Building in Mathematics, Statistics and its Applications* do programa UEM-SIDA 2017-2022.
- À Fundação *Calouste Gulbenkian* pela concessão da Bolsa de Estudos para o financiamento dos estudos. Obrigado!

Resumo

Neste trabalho, desenvolvemos uma abordagem sobre a aproximação assintótica do fluxo de um fluido newtoniano e incompressível no interior de um tubo fino recto com secção transversal circular variável. Primeiramente, definimos de forma precisa a geometria do tubo fino como um domínio fino Ω^ε no espaço tridimensional, onde ε é um pequeno parâmetro relacionado à geometria do domínio. A fronteira do nosso domínio é composta por duas partes disjuntas: Γ_D^ε (fronteira de Dirichlet), que representa a superfície lateral do tubo, e Γ_N^ε (fronteira de Neumann), que representa as extremidades do tubo. Além disso, assumimos que o fluxo é estacionário. Partindo das equações de Navier-Stokes juntamente com a equação de continuidade e assumindo que o parâmetro ε é muito pequeno, deduzimos o modelo que descreve matematicamente o fluxo de um fluido newtoniano e incompressível no domínio Ω^ε na ausência de forças de corpo, conhecido como o *sistema estacionário de Stokes*. Para descrever completamente o nosso problema, consideramos que o fluxo é impulsionado por uma pressão externa que actua como força de superfície nas extremidades do tubo. Especificamente, associamos ao sistema de Stokes duas condições de fronteira: condição de tensão normal na fronteira de Neumann (modelada como uma zona de entrada/saída onde é aplicado um gradiente de pressão como forças de superfície) e uma condição de fronteira de Dirichlet homogênea para o campo de velocidade na parte restante da fronteira. Dessa forma, formulamos um problema de fronteira com condições de fronteira mistas, que é o foco principal deste estudo. Para construir a solução aproximada deste problema, utilizamos o chamado *método formal de expansão assintótica*, que consiste em expressar a solução como uma série de potências do pequeno parâmetro ε . No processo de implementação das etapas do método de expansão assintótica, utilizamos diversas ferramentas de análise matemática e da teoria clássica de equações diferenciais, como o teorema de divergência, técnicas de resolução de equações diferenciais lineares, e teoremas de existência e unicidade da solução para os problemas de Dirichlet e Neumann para a equação de Poisson. Como resultado principal, obtivemos uma forma generalizada da lei de Poiseuille para o termo de ordem zero da velocidade. Além disso, a aproximação obtida satisfaz a condição de fronteira de Dirichlet e conserva o volume.

Palavras-chave: *Fluido Newtoniano e incompressível, Sistema de Stokes, Expansões assintóticas, Fluxo em tubos finos*

Abstract

In this work, we develop an approach to the asymptotic approximation of the flow of a Newtonian incompressible fluid inside a thin straight pipe with a variable circular cross-section. First, we precisely define the geometry of the thin pipe as a thin domain Ω^ε in three-dimensional space, where ε is a small parameter related to the geometry of the domain. The boundary of our domain is composed of two disjoint parts: Γ_D^ε (Dirichlet boundary), which represents the lateral surface of the pipe, and Γ_N^ε (Neumann boundary), which represents the ends of the pipe. In addition, we assume that the flow is stationary. Starting from the Navier-Stokes equations together with the continuity equation and assuming that the ε parameter is very small, we derive the model that mathematically describes the flow of a incompressible Newtonian fluid in the Ω^ε domain in the absence of body forces, the so-called *stationary Stokes system*. To completely describe our problem, we consider that the flow is driven by an external pressure that acts as a surface force at the ends of the pipe. Specifically, we associate two boundary conditions with the Stokes system: a normal stress condition on the Neumann boundary (modeled as an inlet/outlet zone where a pressure gradient is applied as surface forces) and a homogeneous Dirichlet boundary condition for the velocity field on the remaining part of the boundary. In this way, we formulate a boundary problem with mixed boundary conditions, which is the main focus of this study. To construct the approximate solution to the problem, we choose the so-called *formal method of asymptotic expansion*, which is based on constructing the solution as a power series in the small parameter ε . In the process of implementing the steps of the asymptotic expansion method, we used some tools from mathematical analysis and the classical theory of differential equations, such as: the divergence theorem, techniques for solving linear differential equations, existence and uniqueness theorems for solving the Dirichlet problem and the Neumann problem for the Poisson equation. As the main result, we obtained a generalized form of Poiseuille's law for the zeroth-order velocity term. Furthermore, the approximation obtained satisfies the Dirichlet boundary condition and is divergence-free.

Keywords: *Newtonian incompressible fluid, Stokes system, Asymptotic expansions, Flow in thin pipes*

Capítulo 1

Introdução

Na natureza, podemos encontrar uma grande variedade de fluidos que são substâncias que se deformam continuamente quando submetidas a uma força tangencial. O ramo da ciência destinado ao estudo do comportamento do fluido e suas propriedades é denominado *Mecânica dos fluidos*. Este ramo é dividido em dois sub-ramos: *estática dos fluidos* e *dinâmica dos fluidos*. A estática dos fluidos estuda fluidos que se encontram em repouso, enquanto a dinâmica dos fluidos estuda os fluidos que se encontram em movimento.

O movimento de qualquer fluido numa região do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ pode ser descrito por um sistema de equações diferenciais conhecido como *equações de Navier-Stokes*. Em geral, as equações Navier-Stokes apresentam uma grande dificuldade tanto para o tratamento analítico como computacional devido a não linearidade dessas equações.

As dificuldades matemáticas apresentadas pelas equações do movimento de um fluido são tão significativas que soluções explícitas são encontradas apenas em circunstâncias em que, por alguma razão, as equações são reduzidas a uma forma linear. Entre os casos mais simples encontramos aqueles em que o campo de velocidade tem a mesma direcção em todo o lado e é independente da distância na direcção do fluxo (veja [3, p. 179]). Um caso especial deste tipo de fluxo é o fluxo estacionário de um fluido viscoso num tubo recto de secção transversal arbitrária e constante, conhecido como *fluxo de Poiseuille*. Para um fluido newtoniano e incompressível fluindo através de um tubo recto de secção transversal circular constante com paredes impermeáveis, sob a acção de uma diferença de pressão nas extremidades do tubo, a velocidade v é dada pela seguinte fórmula de Poiseuille

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2), \quad (1.1)$$

onde Δp é a diferença de pressão entre as extremidades do tubo, μ é a viscosidade do fluido, r é a coordenada radial, L e R denotam o comprimento e o raio do tubo, respectivamente.

Uma quantidade de importância prática é a taxa volumétrica de fluxo Q , dada por:

$$Q = \int_0^R 2\pi v r dr.$$

Usando a equação (1.1), obtemos

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu L}\Delta p. \quad (1.2)$$

Esta fórmula é conhecida como lei de Poiseuille ou equação de Hagen-Poiseuille. Segundo [31], esta lei foi obtida experimentalmente por Jean Léonard Marie Poiseuille em 1838 quando estudou o fluxo de água através de tubos finos de vidro e os efeitos da diferença de pressão. De forma independente, em 1839, Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen obteve resultados similares aos de Poiseuille. A lei de Poiseuille foi publicada por J. Poiseuille em 1840 nos seus trabalhos [23, 24].

Todavia, a fórmula de Poiseuille dá uma solução exacta apenas no caso do fluxo de um fluido Newtoniano e incompressível em regime laminar através de um tubo com secção transversal constante. Se o tubo tiver uma secção transversal variável ou for curvo, só se pode derivar a aproximação da solução através de técnicas de perturbação singular (veja [22, p. 2]).

Nesta pesquisa, analisamos o fluxo de um fluido newtoniano e incompressível em um tubo fino recto com secção transversal circular variável. Consideramos duas condições fundamentais: o fluxo incompressível e o tubo fino. Um fluxo incompressível é aquele em que a densidade do fluido permanece constante em qualquer ponto ao longo do tempo. Esse tipo de fluxo é frequentemente associado a líquidos, como a água e óleos, que mantêm uma densidade praticamente constante, mesmo sob variações de pressão e temperatura em muitas aplicações práticas.

Um tubo fino é caracterizado por ter um diâmetro muito pequeno em relação ao seu comprimento, permitindo simplificações nas equações de movimento do fluido, pois o fluxo tende a ser suave. Matematicamente falando, um tubo fino pode ser descrito como um domínio fino Ω^ε do espaço tridimensional, onde $\varepsilon > 0$ é um pequeno parâmetro relacionado com a espessura do domínio. No nosso caso, Ω^ε tem a forma de um tubo fino recto de comprimento L e raio não uniforme de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Além das suposições mencionadas, assumimos que o fluxo é estacionário e é impulsionado por uma pressão externa que actua como força de superfície nas extremidades do tubo. Sob essas condições, o movimento do fluido pode ser modelado pelo *sistema de Stokes*.

Devido à complexa geometria do tubo fino Ω^ε , não se pode esperar obter uma forma explícita da solução exacta do sistema de Stokes. Portanto, este trabalho é destinado a obtenção de uma aproximação assintótica da solução do sistema de Stokes.

Na literatura matemática, há vários trabalhos publicados sobre a obtenção da aproximação assintótica de fluxos estacionários em domínios finos. Fabricius, Miroshnikova, Tsandzana e Wall, em [12], investigaram o fluxo de Stokes em domínios finos (tubos finos e películas finas) utilizando o método de convergência em duas escalas para domínios finos, desenvolvido por Marušić e Marušić-Paloka em [15]. Mironshnikova, em [18], investigou o comportamento assintótico do fluxo de um fluido newtoniano em um tubo fino com fronteira rugosa, utilizando o método de expansão assintótica combinado com estimativas de erros. Fabricius, Manjate e Wall, em [11], investigaram o comportamento assintótico do fluxo de Stokes em uma célula de Hele-Shaw generalizada confinada entre duas superfícies. Marušić-Paloka, em [17], examinou

os efeitos da flexão e torção no fluxo de um fluido newtoniano em um tubo curvo e, em [16], apresentou uma justificativa rigorosa de um modelo assintótico para o fluxo de um fluido newtoniano em um sistema de tubos finos. Estudos semelhantes foram realizados por Pažanin, em [21, 22], no contexto de fluidos micro-polares fluindo através de tubos.

1.1 Objectivos da pesquisa

Nosso objectivo principal é obter uma aproximação assintótica do fluxo de um fluido Newtoniano e incompressível em um tubo fino recto de secção transversal circular de raio variável. Para alcançar este objectivo, definimos os seguintes objectivos específicos:

1. Fazer uma descrição sistemática de conceitos e leis básicas da dinâmica dos fluidos;
2. Apresentar a dedução das equações de Navier-Stokes
3. Formular um modelo matemático que descreve o fluxo de um fluido newtoniano e incompressível num tubo fino recto de secção transversal circular variável.
4. Melhorar a forma da lei de Poiseuille.
5. Construir uma aproximação que seja consistente com as leis físicas, como a conservação do volume.

1.2 Importância do estudo

O estudo do fluxo incompressível em tubos finos é de grande importância devido às suas diversas aplicações práticas e contribuições teóricas fundamentais. Em aplicações industriais, como sistemas de tubulação na engenharia civil, redes de distribuição de água potável e gás, sistemas de irrigação agrícola, bem como na mecânica dos fluidos em sistemas de refrigeração e sistemas de injeção de combustível, compreender o comportamento do fluxo incompressível é crucial para otimizar o transporte eficiente de fluidos e garantir o funcionamento adequado desses sistemas. A capacidade de modelar precisamente o fluxo nessas condições não só impacta diretamente a eficiência e segurança desses sistemas, mas também orienta as decisões de projectos e operações, visando a redução de custos operacionais e o aumento da sustentabilidade dos processos envolvidos.

Além disso, estudar o fluxo incompressível em tubos finos contribui significativamente para o avanço do conhecimento em física dos fluidos. Este fenômeno oferece uma oportunidade para investigar e validar teorias existentes, além de desenvolver novos modelos matemáticos aplicáveis em uma variedade de contextos, desde engenharia até ciências médicas. Na medicina, por exemplo, compreender como os fluidos se comportam em micro-canais é crucial para o desenvolvimento de dispositivos médicos avançados, como micro-agulhas e microcânulas, que possibilitam tratamentos mais precisos e menos invasivos.

O estudo do fluxo incompressível em tubos finos pode fornecer informações valiosas sobre o fluxo sanguíneo em vasos sanguíneos, permitindo uma compreensão mais profunda dos factores e parâmetros que influenciam o sistema circulatório. Essa compreensão é essencial para o desenvolvimento de modelos precisos capazes de diagnosticar e tratar doenças cardiovasculares de maneira mais eficaz.

Portanto, acreditamos que os resultados desta pesquisa contribuirão significativamente para o avanço do conhecimento na dinâmica dos fluidos, na medicina e no desenvolvimento de tecnologias eficientes e sustentáveis.

1.3 Materiais e Métodos

Para a execução do presente trabalho fizemos buscas em livros e artigos publicados sobre: Mecânica dos fluidos [1, 3, 13]; Fluxos de fluido incompressível [5, 14, 20]; Fluxo de fluidos em domínios finos [11, 12, 18]; Teoria de equações diferenciais parciais [10, 27]; Teoria das equações de Navier-Stokes [5, 30]; Análise assintótica [4, 8].

Quanto ao desenvolvimento da pesquisa, seguimos as etapas:

1. Levantamento do material necessário: um computador, duas resmas de folhas A4, selecção de artigos e livros relacionados com o nosso campo pesquisa;
2. Investigação preliminar:
 - (a) Estudo dos conceitos e propriedades elementares da Mecânica dos fluidos;
 - (b) Estudo de ferramentas de análise matemática;
3. Dedução das equações de Navier-Stokes;
4. Descrição da geometria do problema;
5. Análise dimensional das equações de Navier-Stokes;
6. Descrição dos tipos de condições de fronteira a serem estudadas.
7. Formulação do problema de pesquisa;
8. Definição de uma estratégia de investigação:
 - (a) Estudo de ferramentas da teoria das equações de Navier-Stokes;
 - (b) Estudo das técnicas clássicas desenvolvidas na teoria problemas de valores de fronteira em domínios que variam com um parâmetro pequeno;
 - (c) Selecção dos métodos de análise assintótica a serem utilizados. Escolhemos o *método formal de expansão assintótica* para investigar a solvabilidade do nosso problema de pesquisa. Este método é uma ferramenta útil para muitos problemas

na forma padrão e produz uma solução correcta do problema limite na maioria dos casos. O seu principal inconveniente é que não fornece provas rigorosas. No entanto, combinando as expansões assintóticas com estimativas de erro, a sua validade pode ser rigorosamente justificada.

9. Implementação das etapas do método de expansão assintótica:

- (a) Construímos as expansões assintóticas para a velocidade u^ε e pressão p^ε em séries de potências do parâmetro pequeno ε das formas

$$u^\varepsilon(x_1, x') = \varepsilon^2 u^0\left(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 u^1\left(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^3 u^2\left(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}\right) + \dots, \quad (1.3a)$$

$$p^\varepsilon(x_1, x') = \varepsilon^0 p^0\left(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^1 p^1\left(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 p^2\left(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}\right) + \dots, \quad (1.3b)$$

onde a variável x_1 é direccionada ao longo da linha média do tubo, enquanto $x' = (x_2, x_3)$ descreve a secção transversal do tubo.

- (b) Inserimos as expansões (1.3a) e (1.3b) no problema formulado, recolhemos os termos de mesma ordem das potências sucessivas de ε , analisamos as equações resultantes e procuramos determinar os termos principais $u^0, u^1, u^2, \dots$ e $p^0, p^1, p^2, \dots$ até uma ordem finita.

10. Construção da solução aproximada.

11. Elaboração da redação final da dissertação.

1.4 Organização do trabalho

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

No segundo capítulo, apresentamos alguns conceitos básicos da teoria de campos, descrevemos o teorema de transporte, definimos a condição de incompressibilidade, deduzimos as equações de Navier-Stokes e formulamos o sistema de equações que descreve o movimento de um fluido newtoniano incompressível.

No terceiro capítulo, formulamos nosso objecto de estudo: descrevemos de forma detalhada a geometria do nosso domínio tridimensional Ω^ε e do domínio redimensionado Ω , fazemos uma análise dimensional das equações de Navier-Stokes e definimos duas condições fronteira que são realistas para fluxos em tubos.

No quarto capítulo, implementamos as etapas do método de expansão assintótica para investigar a solvabilidade do problema de Stokes com condições de fronteira mistas, que é formulado na secção 4.1. Na secção 4.2 construímos expansões assintóticas das funções velocidade u^ε e pressão p^ε em séries de potências do parâmetro pequeno ε . Na secção 4.3 inserimos

as expansões nas equações do nosso problema de fronteira e apresentamos algumas equações satisfeitas pelos termos principais das expansões assintóticas. Na secção 4.4 introduzimos o conceito de função permeabilidade de domínios finos e deduzimos as expressões que definem a permeabilidade do tubo fino Ω e a permeabilidade da secção transversal de Ω . Na secção 4.5 apresentamos um dos resultados principais desta pesquisa: os termos principais das expansões assintóticas satisfazem a lei de Poiseuille.

No quinto capítulo, determinamos mais alguns termos das expansões assintóticas e construímos uma solução aproximada do nosso problema.

Capítulo 2

Equações do movimento

Neste capítulo, vamos apresentar a lista de conceitos básicos essenciais para compreender o problema desta pesquisa e deduzir as equações que governam o movimento de fluidos incompressíveis. Os conceitos e leis básicas da mecânica dos fluidos que sustentam este capítulo podem ser encontrados nas seguintes referências: [1], [3], [5], [9], [13], [20] e [28]

2.1 Descrição do movimento do fluido

Seja Ω_0 uma região aberta e limitada do espaço $\mathbb{R}^3$ ocupada por uma porção de um fluido no instante $t = 0$. Agora, consideremos um ponto material ou uma partícula P movendo-se com o fluido. No instante $t = 0$ a partícula ocupa a posição $X = (X_1, X_2, X_3) \in \Omega_0$ e no instante $t > 0$ suponhamos que ela é movida para a posição $x = (x_1, x_2, x_3)$. Então, o movimento do fluido pode ser descrito pela função fluxo $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ definida por

$$x = \varphi(X, t), \tag{2.1}$$

onde Ω_t é a região ocupada pelo fluido no instante t . Assumimos que φ é bijectiva e é um difeomorfismo local, isto é, φ e φ^{-1} são funções diferenciáveis.

Além disso, φ descreve o movimento individual da partícula que no instante inicial $t = 0$ estava na posição X . Esta é a chamada *descrição lagrangiana* e os pontos X em Ω_0 são chamados *coordenadas materiais*. Em alternativa, a *descrição espacial*, também conhecida como *descrição euleriana*, consiste em observar o estado do movimento em um ponto fixo x do espaço. Deste modo, a velocidade, densidade, pressão e outros campos são descritos em termos das variáveis x e t . Os pontos x em Ω são chamados *coordenadas espaciais*.

Cada um dos sistemas de coordenadas mencionados acima são descrições válidas. Nesta pesquisa, utilizaremos a descrição euleriana para descrever o movimento de um fluido.

2.2 Elementos da teoria de campo

Nesta secção, vamos descrever três principais variáveis de estado que caracterizam o movimento de um fluido: velocidade, densidade e pressão.

Definição 2.2.1 *A velocidade de uma partícula é definida como a derivada da função fluxo (2.1) em relação ao tempo. Se $u = u(x, t)$ denota a velocidade da partícula que, no instante t , ocupa a posição x , então*

$$u(x, t) = \frac{\partial \varphi(X, t)}{\partial t} \Leftrightarrow u = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \right). \quad (2.2)$$

Para cada tempo fixo u é um campo vectorial em Ω e é chamado *campo de velocidade do fluido*.

Dado o campo de velocidade $u(x, t)$, podemos encontrar o correspondente fluxo resolvendo o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, t) \\ x(0) = X. \end{cases} \quad (2.3)$$

Consideremos o campo de velocidade $u(x, t)$ em coordenadas cartesianas, isto é:

$$u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)),$$

onde u_i , $i = 1, 2, 3$, são campos escalares definidos em $\Omega_t \times]0, \infty[$. O gradiente da velocidade é definido como o tensor de segunda ordem

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^3.$$

Vamos agora introduzir o conceito de derivada material, que estabelece a taxa de variação de uma certa quantidade no movimento do fluido em relação ao tempo. Seja $f(x, t)$ uma função escalar em Ω_t que representa alguma quantidade arbitrária no movimento do fluido. Como $x = \varphi(X, t)$, então a derivada da função f em relação ao tempo é calculada segundo a regra de cadeia e o resultado chamamos *Derivada material*:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \cdot \nabla f. \quad (2.4)$$

Similarmente, para uma função vectorial $F(x, t)$ a derivada material é definida por

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (u \cdot \nabla)F, \quad (2.5)$$

onde o operador $u \cdot \nabla$ é definido para cada componente do campo vectorial F como

$$(u \cdot \nabla)F_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = u \cdot \nabla F_i. \quad (2.6)$$

Definição 2.2.2 *A aceleração de uma partícula é a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo:*

$$a(x, t) = \frac{du(x, t)}{dt} = \frac{Du}{Dt}.$$

Da definição da derivada material, segue que

$$a(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u. \quad (2.7)$$

A derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$ é a taxa da velocidade num ponto fixo do espaço, ou seja, é a aceleração local da partícula. O termo não linear $(u \cdot \nabla)u$ é a aceleração convectiva e reflecte a taxa da velocidade no espaço devido ao deslocamento de um elemento de fluido para uma posição diferente no campo do fluxo.

Pressão. A pressão é uma função escalar

$$p = p(x, t)$$

que descreve as forças que actuam sobre a superfície de um elemento do fluido. Mais precisamente, a pressão p actua como uma força por unidade de área normal à superfície do elemento do fluido. Portanto, o total das forças exercidas pela pressão sobre a superfície do fluido é

$$-\int_{\partial\Omega} p \hat{n} dS = -\int_{\Omega} \nabla p dx,$$

onde $\hat{n}$ é o vector normal unitário exterior à $\partial\Omega$.

Densidade. A densidade do fluido

$$\rho = \rho(x, t),$$

é definida como a massa por unidade de volume. Nesta pesquisa vamos assumir que a densidade é constante, isto é, a densidade é mesma em todos os elementos do fluido para qualquer tempo t . Em geral, a densidade é uma função da pressão p e temperatura T .

2.3 Teorema de transporte

Nesta secção vamos descrever um resultado fundamental de diferenciação, conhecido na mecânica dos fluidos como teorema de transporte. O teorema nos dá uma fórmula para o cálculo

da derivada de uma quantidade escalar ou vectorial integrada sobre um elemento de fluido e é um instrumento essencial para a dedução das equações do movimento de um fluido. Seja J o jacobiano da transformação (2.1), isto é,

$$J(X, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Pela suposição que a aplicação $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ admite uma inversa diferenciável, segue que

$$0 < J < \infty.$$

A função J satisfaz a seguinte fórmula

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J(X, t)(\operatorname{div} u)(x, t), \quad (2.9)$$

onde u é o campo de velocidade definido em (2.2). A validade da fórmula (2.9) foi feita originalmente por Euler (veja [28, p. 9]).

Teorema 2.3.1 *Para uma função escalar $f(x, t)$ da classe $\mathcal{C}^1$, vale a seguinte fórmula*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + u \cdot \nabla f + f \operatorname{div} u \right) = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fu) \right) dx. \quad (2.10)$$

Demonstração. Vamos aplicar a mudança de variável $x = \varphi(X, t)$ no integral do primeiro membro da equação (2.10). Então, a região de integração Ω_t é substituída por Ω_0 , e assim

$$\int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_0} f(\varphi(X, t), t) J(X, t) dX. \quad (2.11)$$

Derivando ambos os membros da equação (2.11) em relação a t , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0} f(\varphi(X, t), t) J(X, t) dX \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} [f(\varphi(X, t), t) J(X, t)] dX \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} (f(\varphi(X, t), t)) J(X, t) + f(\varphi(X, t), t) \frac{\partial}{\partial t} J(X, t) \right) dX. \end{aligned}$$

Da definição de derivada material e aplicando fórmula (2.9), obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + u \cdot \nabla f + f(\varphi(X, t), t) (\operatorname{div} u)(\varphi(X, t), t) \right) J(X, t) dX.$$

Agora, empregando a mudança inversa de variável, $x = \varphi(X, t)$, o integral do lado direito da

equação acima transforma-se em

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fu) \right) dx,$$

o que completa a demonstração. $\square$

O teorema de transporte pode ser generalizado para funções vectoriais. Se $F(x, t)$ é uma quantidade vectorial, então:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} F(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + (u \cdot \nabla) F + F \operatorname{div} u \right) dx. \quad (2.12)$$

2.4 Equação de continuidade

Seja $\rho(x, t)$ ou simplesmente ρ a densidade da massa do fluido. A massa total do fluido que ocupa a região Ω_t é dada por

$$m = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx.$$

Princípio de conservação de massa: *Para qualquer volume inicial Ω_0 , a massa total da matéria contida em $\Omega_t = \varphi(\Omega_0)$ é a mesma contida no instante inicial.*

Este princípio pode ser expresso como

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx = 0.$$

Aplicando o teorema de transporte, obtém-se a equação:

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} u \right) (x, t) dx = 0.$$

Como a região Ω_t é arbitrária, obtém-se então a equação de conservação de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} u = 0, \quad (2.13)$$

também conhecida como *equação da continuidade*. Atendendo a definição da derivada material, a equação da continuidade pode ser escrita na forma

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} u = 0, \quad (2.14)$$

Fluido incompressível. Dizemos que um fluido é incompressível se o volume de qualquer elemento de fluido permanece constante ao longo do tempo. Então, o fluido de fluxo $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ é incompressível se

$$\frac{d}{dt} |\Omega_t| = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx = 0. \quad (2.15)$$

Aplicando o teorema de transporte para $f(x, t) = 1$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} dx = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} u dx = 0. \quad (2.16)$$

Como Ω_t é arbitrária, a equação (2.16) implica a condição de incompressibilidade

$$\operatorname{div} u = 0. \quad (2.17)$$

Em outras palavras, um fluido é incompressível se o campo de velocidade for *solenoidal*. Se um fluido tem densidade constante, ρ não depende da posição x e do tempo t , a equação da continuidade

$$\frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div}(\rho u) = 0,$$

reduz-se na condição de incompressibilidade (2.17), o que significa que o fluido é incompressível.

Um fluido pode ser incompressível e sua densidade não ser constante, o único requisito é que a densidade de cada partícula permaneça inalterada (veja [5, p. 33]). Por convenção, neste trabalho, vamos assumir que um fluido é incompressível se a densidade de todas as partículas for constante ($\rho = \text{const.}$).

2.5 Equação do momento

Seja Ω_t um domínio delimitado pela superfície $\partial\Omega_t$. O momento linear de uma porção de fluido que, no instante t , ocupa a região Ω_t é definido pelo integral

$$\int_{\Omega_t} \rho(x, t) u(x, t) dx. \quad (2.18)$$

Princípio de conservação do momento: *a taxa de variação do momento linear de um volume arbitrário em relação ao tempo é igual à soma das forças na região*. De uma forma geral, são consideradas dois tipos de forças:

1. **Forças de corpo:** as forças que se distribuem por toda a massa ou volume do elemento, como a força de gravidade, forças eletromagnéticas. O total das forças de corpo que actuam no fluido é dado por

$$\int_{\Omega_t} \rho(x, t) f(x, t) dx, \quad (2.19)$$

onde $f(x, t)$ é a resultante das forças de corpo por unidade de massa

2. **Forças de superfície:** as forças que actuam sobre a superfície $\partial\Omega_t$.

O total das forças de superfície é dado por

$$\int_{\Omega_t} \nu(x, t, \mathbf{n}) ds, \quad (2.20)$$

onde $\mathbf{n}$ é o vector unitário normal à superfície $\partial\Omega_t$ apontado para fora. $\nu(x, t, \mathbf{n})$ é o vector que representa a resultante das forças de superfície por unidade de área no ponto x no instante t . O vector ν é chamado *vector de tensão*.

Assim, o princípio do momento linear para o volume Ω_t fica expresso pela seguinte equação

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) u(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) f(x, t) dx + \int_{\Omega_t} \nu(x, t, \mathbf{n}) dS \quad (2.21)$$

Segue do teorema da tensão de Cauchy (veja [5], p. 11) que o vector de tensão ν é uma função que depende linearmente de $\mathbf{n}$, ou seja, existe uma função matricial $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^3$ tal que

$$\nu(x, t, \mathbf{n}) = \sigma(x, t) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.22)$$

A função σ representa o estado de tensões local e é chamada *tensor de tensões*. O elemento σ_{ij} representa a componente da tensão local na direcção i sobre a superfície com a normal na direcção de j . Mais precisamente:

1. σ_{ij} é a componente i da força exercida sobre uma superfície de área unitária com a normal na direcção do vector e_j . Esta é a *tensão de cisalhamento*.
2. σ_{ii} é a componente i da força exercida sobre uma superfície de área unitária com a normal na direcção do vector e_i . Esta é a *tensão normal*.

Substituindo a relação (2.22) no segundo integral do segundo membro da equação (2.21), obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) u(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \rho f dx + \int_{\partial\Omega_t} \sigma(x, t) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.23)$$

Aplicando o teorema de transporte para calcular a derivada a esquerda da equação (2.23), obtemos

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \rho u \operatorname{div} u + (u \cdot \nabla)(\rho u) \right) dx = \int_{\Omega_t} \rho f dx + \int_{\partial\Omega_t} \sigma(x, t) \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.24)$$

Em virtude da equação de continuidade, o primeiro membro da equação (2.24) reduz-se em

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \rho u \operatorname{div} u + (u \cdot \nabla)(\rho u) = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right). \quad (2.25)$$

De (2.24) e (2.25), resulta que

$$\int_{\Omega_t} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) dx = \int_{\Omega_t} \rho f dx + \int_{\partial\Omega_t} \sigma(x, t) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.26)$$

Agora, para o integral de superfície do segundo membro da equação (2.26), vamos aplicar o teorema de divergência:

$$\int_{\partial\Omega_t} \sigma(x, t) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \sigma dx,$$

onde o divergente do tensor σ é definido como

$$\operatorname{div} \sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)_{i=1}^3. \quad (2.27)$$

Logo, a equação (2.26) pode ser escrita como

$$\int_{\Omega_t} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) dx = \int_{\Omega_t} (\rho f + \operatorname{div} \sigma) dx. \quad (2.28)$$

Como Ω_t é uma região arbitrária, obtemos então a equação do momento

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) = \operatorname{div} \sigma + \rho f, \quad (2.29)$$

que também pode ser escrita na forma

$$\frac{Du}{Dt} = \operatorname{div} \sigma + \rho f.$$

O tensor σ pode ser expresso como:

$$\sigma = -pI + \tau, \quad (2.30)$$

onde p é a pressão num ponto do fluido em movimento, I é o tensor identidade definido por $I = (\delta_{ij})_{i,j=1}^3$ e $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1}^3$ é o *tensor viscoso* resultante da deformação dos elementos do fluido.

2.6 Fluido newtoniano

Definição 2.6.1 *Um fluido é chamado perfeito, ideal ou inviscoso, se o tensor viscoso é nulo, isto é,*

$$\tau_{ij} = 0 \quad \text{para todos } 1 \leq i, j \leq 3.$$

Caso contrário, o fluido é chamado viscoso.

Para um fluido viscoso, o tensor de tensões (2.30) representa a forma básica da equação constitutiva para modelar o fluido. Foi confirmado experimentalmente que o tensor viscoso τ depende da densidade do fluido ρ e do gradiente da velocidade ∇u . Notemos que ∇u pode ser expresso como

$$\nabla u \stackrel{\text{def}}{=} e(\nabla u) + \omega(\nabla u), \quad (2.31)$$

com

$$e(\nabla u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T) \quad \text{e} \quad \omega(\nabla u) = \frac{1}{2} (\nabla u - (\nabla u)^T),$$

onde $e(\nabla u) = (e_{ij})_{i,j=1}^3$ é a parte simétrica e representa a taxa de deformação e denomina-se *tensor de deformação*, e $\omega(\nabla u) = (\omega_{ij})_{i,j=1}^3$ é a parte anti-simétrica e representa a taxa de rotação, respectivamente. Mostra-se que o tensor viscoso τ é uma função única da taxa de deformação (veja [32, p. 24]), isto é,

$$\tau = \tau(e(\nabla u)). \quad (2.32)$$

Definição 2.6.2 *Um fluido é chamado newtoniano se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *O tensor viscoso é uma função linear do gradiente da velocidade ∇u e independente de outras quantidades cinemáticas, isto é,*

$$\tau = \tau(\nabla u).$$

2. *A tensão de cisalhamento é zero quando o fluido se move como um corpo rígido, ou seja,*

$$e_{ij} = 0 \Rightarrow \tau_{ij} = 0, \quad \text{para todos } i, j,$$

reduzindo à condição de pressão hidrostática $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$.

3. *A relação entre o tensor viscoso τ e os gradientes de velocidade é isotrópica, ou seja, a relação deve ser a mesma sob rotações arbitrárias dos eixos de coordenadas.*

Com base nestas três condições, Stokes deduziu que o tensor viscoso de um fluido Newtoniano é definido por

$$\tau_{ij} = \lambda e_{kk} + 2\mu e_{ij}, \quad (2.33)$$

com

$$e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \operatorname{div} u \quad \text{e} \quad 2e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

onde as constantes λ e μ são chamadas *coeficientes de viscosidade*.

Das equações (2.30) e (2.33) segue que

$$\sigma = (-p + \lambda \operatorname{div} u)I + 2\mu e(\nabla u), \quad (2.34)$$

que é a expressão geral do tensor para um fluido newtoniano.

Substituindo a relação constitutiva (2.34) na equação do momento (2.29), obtemos a seguinte equação na forma convectiva

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right] = -\nabla p + \lambda \nabla(\operatorname{div} u) + 2\mu \operatorname{div}(e(\nabla u)) + \rho f, \quad (2.35)$$

onde o termo do lado esquerdo corresponde as forças inerciais e os termos do lado direito correspondem a força de pressão (primeiro termo), forças viscosas (segundo e terceiro termo) e forças externas aplicadas ao fluido (quarto termo), respectivamente.

A equação (2.35) foi obtida inicialmente por C. L. Navier [19], S. D. Poisson, A. B. Saint-Venant [26] e G. G. Stokes [29] entre 1827 e 1845. Esta equação é usualmente conhecida como *Equação de Navier-Stokes* (veja [1], [3], [9]). Esta equação é sempre resolvida junto com a equação da continuidade (2.13). Em particular, o sistema

$$\begin{cases} \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right] = \operatorname{div}[-pI + 2\mu e(\nabla u)] + \rho f \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

descreve matematicamente o fluxo de um fluido newtoniano e incompressível.

No caso do fluxo ser estacionário, isto é, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, o sistema toma a forma

$$\begin{cases} \rho(u \cdot \nabla)u = \operatorname{div}[-pI + 2\mu e(\nabla u)] + \rho f \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Capítulo 3

Formulação do modelo

O sistema estacionário de Navier-Stokes (2.37) pode ser colocado num domínio arbitrário do espaço tridimensional. Neste capítulo, vamos trabalhar com o sistema em domínios específicos cuja estrutura geométrica segue a abordagem sugerida por Marušić e Marušić-Paloka em [15]. O objectivo principal deste capítulo é formular o modelo matemático que descreve o fluxo de um fluido newtoniano e incompressível num tubo fino de secção transversal variável.

3.1 Geometria do problema

Seja D um domínio Lipschitz de $\mathbb{R}^2$ que representa um disco com raio variável $r(x_1)$ definido por

$$D(x_1) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : |y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} < r(x_1) \right\}.$$

Note que D é a projecção da secção transversal do que chamaremos tubo recto de comprimento L definido por

$$\Omega = \{(x_1, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < L, \quad y \in D(x_1)\}.$$

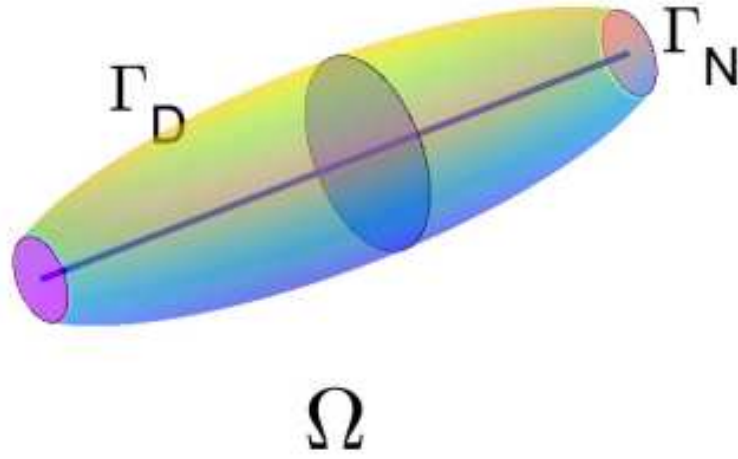
A fronteira de Ω consiste de duas partes disjuntas Γ_D e Γ_N , que representam a parede lateral e as extremidades do tubo respectivamente,

$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \quad \text{e} \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset,$$

onde

$$\Gamma_D = \{(x_1, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < L, \quad y \in \partial D(x_1)\},$$

$$\Gamma_N = \{(x_1, y) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in \{0, L\}, \quad y \in D(x_1)\}.$$

Figura 3.1: Estrutura do domínio Ω

3.2 Análise dimensional

As equações de Navier-Stokes (2.37) estão expressas em termos de variáveis físicas e dependem explicitamente de dois parâmetros constantes: a densidade e viscosidade do fluido. No entanto, as equações não contêm parâmetros relacionados com a geometria do domínio e a velocidade característica do fluido, que são essenciais para compreender a dinâmica do fluxo. Para incluir tais parâmetros nas equações, é preciso realizar uma análise dimensional, isto é, colocar as equações numa forma sem dimensões (adimensional).

Consideramos o tubo Ω definido na secção anterior como sendo o domínio ocupado pelo fluido. Começamos por fazer uma lista de variáveis e identificamos suas dimensões através das dimensões fundamentais: massa (M), comprimento (L) e tempo (T) e introduzimos as quantidades:

- μ = viscosidade dinâmica do fluido $[M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}]$;
- ρ = densidade do fluido $[M \cdot L^{-3}]$;
- $G \stackrel{\text{def}}{=} \|\nabla p_b\|_{\infty} = \max_{x_1 \in (0, L)} \left| \frac{p_{in} - p_{out}}{L} \right|$ norma do gradiente da pressão $[M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}]$,

onde p_{in} e p_{out} (ambas constantes) são os valores da pressão nas duas extremidades do tubo. Como consideramos o fluxo através de um tubo longo, com velocidade constante U , a geometria do domínio consiste de dois tipos de comprimento característico a saber: L que é o comprimento do tubo longo e o raio exterior da secção transversal do tubo definido por

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 \leq x_1 \leq L} r(x_1)$$

Com estas quantidades fixadas, vamos determinar a velocidade característica U do problema. Para tal, assumimos que

$$U = G^{\beta_1} \cdot R^{\beta_2} \cdot \mu^{\beta_3} \cdot \rho^{\beta_4}, \quad (3.1)$$

onde os expoentes β_1 , β_2 , β_3 e β_4 devem ser determinados. Escrevemos cada membro da equação em termos das dimensões

$$\begin{aligned} M^0 \cdot L^1 \cdot T^{-1} &= (M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2})^{\beta_1} \cdot L^{\beta_2} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1})^{\beta_3} \cdot (M \cdot L^{-3})^{\beta_4} \\ M^0 \cdot L^1 \cdot T^{-1} &= M^{\beta_1 + \beta_3 + \beta_4} \cdot L^{-2\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - 3\beta_4} \cdot T^{-2\beta_1 - \beta_3} \end{aligned}$$

Comparando as potências de M , L e T , obtemos o seguinte sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 + \beta_4 = 0 \\ -2\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - 3\beta_4 = 1 \\ -2\beta_1 - \beta_3 = -1. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, encontramos $S = (\lambda + 1, 3\lambda + 2, -2\lambda - 1, \lambda)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Se escolhermos $\lambda = 0$, então $S = (1, 2, -1, 0)$. Deste modo, a velocidade característica fica determinada por

$$U = \frac{GR^2}{\mu} = \frac{\|\nabla p_b\|_{\infty} R^2}{\mu}.$$

Vamos agora apresentar o chamado *número de Reynolds* que é definido por

$$\mathcal{Re} = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{\rho L R^2 \|\nabla p_b\|_{\infty}}{\mu^2}. \quad (3.2)$$

Da definição do número de Reynolds vemos que ele é adimensional e estabelece a relação entre as forças inerciais e as forças de viscosidade no fluido. Quando o número de Reynolds é pequeno, os efeitos viscosos dominam e dizemos que o fluxo é *laminar*. Quando o número de Reynolds é muito grande, os efeitos de inércia dominam e dizemos que o fluxo é *turbulento*. Para uma abordagem detalhada sobre o regime do fluxo em função do número de Reynolds veja [20, Cap. 14 e 21].

3.2.1 Equações de Navier-Stokes na forma adimensional

Consideremos as seguintes variáveis sem dimensões:

$$\hat{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \hat{y}_1 = \frac{y_1}{L} \quad \text{e} \quad \hat{y}_2 = \frac{y_2}{L},$$

e por escala, definimos o campo de velocidade e pressão sem dimensões

$$\hat{u}(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{y}_2) = \frac{u(x_1, y_1, y_2)}{U} \quad \text{e} \quad \hat{p}(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{y}_2) = \frac{p(x_1, y_1, y_2)}{P},$$

onde P é a pressão característica a ser definida. Aplicando estas mudanças de variáveis no sistema (2.37) e assumindo que $f = 0$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\rho U^2}{L}(\hat{u} \cdot \nabla)\hat{u} = 2\mu \frac{U}{L^2} \operatorname{div}[e(\nabla\hat{u})] - \frac{P}{L}\nabla\hat{p} & (3.3a) \\ \operatorname{div}(\hat{u}) = 0, & (3.3b) \end{cases} \quad (3.3)$$

onde todos os operadores diferenciais estão definidos em termos das novas variáveis. Multiplicando a equação (3.3a) por $\frac{L^2}{\mu U}$ e escolhendo a pressão característica

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R^2 \|\nabla p_b\|}{L},$$

obtemos as equações de Navier-Stokes na forma adimensional

$$\begin{cases} \mathcal{R}e(\hat{u} \cdot \nabla)\hat{u} = -\nabla\hat{p} + 2 \operatorname{div}[e(\nabla\hat{u})] \\ \operatorname{div}(\hat{u}) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

A presença do termo não linear $(\hat{u} \cdot \nabla)\hat{u}$ na equação do momento do sistema estacionário (3.4) dificulta muito o processo de resolução do problema na maioria das vezes, excepto para fluxos mais simples. Acontece que em algumas situações de interesses práticos o termo não linear, embora não identicamente igual a zero, pode ser negligenciado como uma aproximação (veja [3], Cap. 4). Uma forma de obter essa aproximação é assumir que o número de Reynolds é muito pequeno, isto é,

$$\mathcal{R}e \ll 1,$$

para que os efeitos de inércia possam ser negligenciados quando comparados com os efeitos viscosos. Nestas condições, obtemos o chamado *Sistema de Stokes*.

$$\begin{cases} -\nabla\hat{p} + 2 \operatorname{div}[e(\nabla\hat{u})] & = 0 \\ \operatorname{div} \hat{u} & = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Notemos que o sistema de Stokes é uma linearização das equações de Navier-Stokes, então pode ser resolvido por vários métodos.

3.2.2 Redimensionamento do sistema de Stokes

O objectivo deste trabalho é dentre outros desenvolver as ferramentas necessárias usando suposições geométricas para simplificar o modelo (3.5) até onde podemos e resolvê-lo. Começamos por multiplicar todas as dimensões do disco de raio variável $D(x_1)$ por $1/L$ e definimos o parâmetro ε como

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R}{L} \ll 1,$$

isto é, o parâmetro ε é o comprimento relativo da relação entre duas características do domínio R e L . Desta definição, tendo em conta que $\hat{y} = y/L$, resulta que

$$|\hat{y}| < \varepsilon h(x_1),$$

onde $h(x_1) \stackrel{\text{def}}{=} r(x_1)/R$. Donde sem perda de generalidade assumimos que $R = 1$ e definimos a família de discos $D^\varepsilon(x_1)$ dependente de um pequeno parâmetro ε por

$$D^\varepsilon(x_1) = \left\{ x' = (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : |x'| = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} < \varepsilon r(x_1) \right\}.$$

Definimos o domínio fino Ω^ε de espessura variável $\varepsilon h(x_1)$ como

$$\Omega^\varepsilon = \left\{ (x_1, x') \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < L, x' \in D^\varepsilon(x_1) \right\}.$$

O domínio Ω^ε é chamado *tubo fino* de raio variável $\varepsilon r(x_1)$. A fronteira de Ω^ε consiste de duas partes disjuntas Γ_D^ε e Γ_N^ε definidas por

$$\begin{aligned} \Gamma_D^\varepsilon &= \left\{ (x_1, x') \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 < L, x' \in \partial D^\varepsilon(x_1) \right\}, \\ \Gamma_N^\varepsilon &= \left\{ (x_1, x') \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in \{0, L\}, x' \in D^\varepsilon(x_1) \right\}. \end{aligned}$$

Introduzindo parâmetro ε na expressão do número de Reynolds, e uma vez que ε é muito pequeno e as quantidades ρ , L , μ e $\|\nabla p_b\|_\infty$ são fixadas, temos

$$\frac{\rho L^3 \varepsilon^2 \|\nabla p_b\|_\infty}{\mu^2} \ll 1,$$

o que significa que o sistema de Stokes (3.5) é consistente no domínio fino Ω^ε . Adicionalmente, eliminamos a notação de chapéu nas equações futuras expressando o sistema em termos de variáveis físicas, e índice superior será adicionado às variáveis das equações para esclarecer a dependência da solução em termos do parâmetro pequeno, ou seja,

$$\begin{cases} \operatorname{div} [-p^\varepsilon I + 2\mu e(\nabla u^\varepsilon)] &= 0 & \text{em } \Omega^\varepsilon \\ \operatorname{div} u^\varepsilon &= 0 & \text{em } \Omega^\varepsilon. \end{cases} \quad (3.6)$$

Derivamos o modelo matemático que descreve o fluxo de um fluido incompressível em regime laminar de duas maneiras. Primeiro, assumimos que os efeitos viscosos predominam sobre os efeitos de inércia. Segundo, consideramos que a geometria do sistema é pequena. Portanto, um fluxo em regime laminar é caracterizado por uma das seguintes propriedades: baixa velocidade, alta viscosidade, baixa densidade ou geometria muito pequena.

3.3 Condições de fronteira

A fim de resolver sistema de Stokes (3.6) ou o sistema de Navier-Stokes (2.37) e obter uma solução única é preciso impor algumas condições adequadas na fronteira do domínio ocupado pelo fluido. Um sistema de equações diferenciais junto com um conjunto de condições de fronteira é chamado problema de valor de fronteira (PVF). Existem vários tipos de condições de fronteira que podemos associar ao sistema Stokes e sistema de Navier-Stokes (veja [2], [7], [14]).

Nesta pesquisa, a fronteira está dividida em duas partes disjuntas Γ_D (fronteira de Dirichlet) e Γ_N (fronteira de Neumann). Focamo-nos em fluxos impulsionados por pressão, ou seja, assume-se que o fluxo satisfaz a condição de tensão normal na fronteira Γ_N juntamente com a condição homogênea de Dirichlet na fronteira lateral Γ_D . Mais precisamente, são impostas as seguintes condições de fronteira:

$$u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D \quad (3.7a)$$

$$[-pI + 2\mu e(\nabla u)]\hat{n} = -p_b\hat{n} \quad \text{sobre } \Gamma_N, \quad (3.7b)$$

onde $\hat{n}$ denota o vector normal unitário exterior da fronteira e p_b é a pressão externa aplicada sobre a superfície Γ_N .

A condição (3.7a) significa que as partículas do fluido em contacto com a parede sólida possuem velocidade nula. Esta condição é chamada *condição de não deslizamento* e foi observada empiricamente, pela primeira vez, por Stokes na interface de superfície e líquido.

Capítulo 4

Método de expansão assintótica

No capítulo anterior definimos de forma precisa o domínio fino Ω^ε , formulamos o modelo que descreve o fluxo estacionário de um fluido newtoniano incompressível na ausência de forças de corpo e descrevemos dois tipos de condições de fronteira que caracterizam o comportamento do fluxo na superfície lateral e nas extremidades do tubo. Neste capítulo, investigamos a solvabilidade do sistema estacionário de Stokes no domínio limitado Ω^ε com condições de fronteira mistas.

4.1 Fluxo de Stokes no domínio fino

Em Ω^ε consideramos o seguinte problema de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\nabla p^\varepsilon + 2\mu \operatorname{div}(e(\nabla u^\varepsilon)) = 0 & \text{em} & \Omega^\varepsilon \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{em} & \Omega^\varepsilon \\ (-p^\varepsilon I + 2\mu e(\nabla u^\varepsilon))\hat{n} = -p_b \hat{n} & \text{sobre} & \Gamma_N^\varepsilon \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sobre} & \Gamma_D^\varepsilon, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde as funções desconhecidas $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$ e p^ε representam o campo de velocidade e a pressão do fluido, respectivamente, μ é uma constante positiva que denota a viscosidade do fluido, $\hat{n}$ é o vector normal unitário exterior a $\partial\Omega^\varepsilon$ e $e(\nabla u^\varepsilon)$ denota a parte simétrica do gradiente da velocidade, ou seja,

$$e(\nabla u^\varepsilon) = \frac{1}{2} (\nabla u^\varepsilon + (\nabla u^\varepsilon)^T).$$

Em outras palavras, (4.1) é o sistema de Stokes que modela o fluxo de um fluido newtoniano incompressível no tubo fino Ω^ε impulsionado por uma pressão externa $p_b = p_b(x_1)$ que é aplicada nas extremidades do tubo.

4.2 Expansão assintótica

Assumimos que a solução do problema (4.1) admite expansões assintóticas das formas

$$u^\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2} u^k(x_1, x'/\varepsilon) \quad \text{e} \quad p^\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p^k(x_1, x'/\varepsilon), \quad (4.2)$$

onde $u^k(x_1, x'/\varepsilon)$ e $p^k(x_1, x'/\varepsilon)$ são funções desconhecidas. u^0 e p^0 denominam-se termos principais da expansões assintóticas. Utilizamos a notação com índice superior ε , $u^\varepsilon(x_1, x')$ e $p^\varepsilon(x_1, x')$, para indicar que as funções estão definidas em Ω^ε e a notação sem ε como índice superior, $p^k(x_1, x'/\varepsilon)$ e $u^k(x_1, x'/\varepsilon)$, para indicar que as funções estão definidas em Ω . Observamos que as funções p^k e u^k são definidas por meio da mudança de variável $(x_1, x') \rightarrow (x_1, x'/\varepsilon)$. Denotando $\frac{x'}{\varepsilon} = (\frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon})$ por $y = (y_1, y_2)$, então $u^k = u^k(x_1, y)$ e $p^k = p^k(x_1, y)$.

A ideia principal do método de expansão assintótica consiste em inserir as expansões assintóticas (4.2) no problema de valor de fronteira (4.1) e depois recolher os termos de mesma ordem das potências sucessivas de ε . Para implementar este método, começamos por definir os seguintes operadores diferenciais:

$$\begin{aligned} \nabla_{x_1} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, 0, 0 \right), \quad \nabla_y = \left(0, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right), \\ \text{div}_{x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \text{div}_y = \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}. \end{aligned}$$

Definimos ainda os operadores $e(\nabla_{x_1} v)$ e $e(\nabla_y v)$ como segue:

$$e(\nabla_{x_1} v) = \frac{1}{2} (\nabla_{x_1} v + (\nabla_{x_1} v)^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$e(\nabla_y v) = \frac{1}{2} (\nabla_y v + (\nabla_y v)^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \frac{\partial v_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & 2 \frac{\partial v_2}{\partial y_1} & \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \frac{\partial v_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y_2} & \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \frac{\partial v_3}{\partial y_1} & 2 \frac{\partial v_3}{\partial y_2} \end{pmatrix},$$

onde $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Substituindo as expansões (4.2) na equação do momento, obtemos:

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^{-1} \nabla_y p^0 - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\nabla_{x_1} p^k + \nabla_y p^{k+1}) \\
& + 2\mu \operatorname{div}_y \left\{ \varepsilon^0 e(\nabla_y u^0) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} (e(\nabla_{x_1} u^k) + e(\nabla_y u^{k+1})) \right\} \\
& + 2\mu \operatorname{div}_{x_1} \left\{ \varepsilon^1 e(\nabla_y u^0) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2} (e(\nabla_{x_1} u^k) + e(\nabla_y u^{k+1})) \right\} = 0, \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Da equação do momento (4.3), podemos extrair

$$\varepsilon^{-1} : \quad -\nabla_y p^0 = 0 \tag{4.4a}$$

$$\varepsilon^0 : \quad -\nabla_{x_1} p^0 - \nabla_y p^1 + 2\mu \operatorname{div}_y (e(\nabla_y u^0)) = 0 \tag{4.4b}$$

A equação de continuidade pode ser expressa na forma

$$\varepsilon^1 \operatorname{div}_y u^0 + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_1} + \operatorname{div}_y u^{k+1} \right) = 0 \quad \text{em } \Omega. \tag{4.5}$$

Desta equação, podemos extrair

$$\varepsilon^1 : \quad \operatorname{div}_y u^0 = 0 \tag{4.6a}$$

$$\varepsilon^2 : \quad \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \operatorname{div}_y u^1 = 0 \tag{4.6b}$$

$$\varepsilon^3 : \quad \frac{\partial u_1^1}{\partial x_1} + \operatorname{div}_y u^2 = 0 \tag{4.6c}$$

Para as condições de fronteira, notemos primeiro que a condição de Dirichlet nos dá

$$u^k = 0 \quad \text{em } \Gamma_D, \quad \text{para todo } k \geq 0. \tag{4.7}$$

Para a condição de Neumann, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0 (p_b - p^0) \hat{n} &+ \varepsilon^1 (-p^1 I + 2\mu e(\nabla_y u^0)) \hat{n} \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2} \{ -p^{k+2} I + 2\mu (e(\nabla_{x_1} u^k) + e(\nabla_y u^{k+1})) \} \hat{n} = 0. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Desta forma, as condições de fronteira nos dão as seguintes equações

$$\varepsilon^0 : \quad p^0 \hat{n} = p_b \hat{n} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_N \quad (4.9a)$$

$$\varepsilon^1 : \quad [-p^1 I + 2\mu e(\nabla_y u^0)] \hat{n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_N \quad (4.9b)$$

$$\varepsilon^2 : \quad [-p^2 I + 2\mu(e(\nabla_y u^1) + e(\nabla_{x_1} u^0))] \hat{n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_N \quad (4.9c)$$

$$\varepsilon^0 : \quad u^0 = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_D \quad (4.9d)$$

4.3 Análise das equações

O objectivo desta secção é caracterizar os termos de ordem zero nas expressões da velocidade e pressão, analisando as equações (4.3) e (4.5) juntamente com as condições de fronteira.

4.3.1 Equação do momento

Notemos primeiro que a equação (4.4a) nos dá

$$p^0 = p^0(x_1), \quad x_1 \in (0, L). \quad (4.10)$$

Isto significa que a variação da pressão, até a aproximação de ordem zero, ao longo do tubo depende apenas dos pontos x_1 da linha média do tubo recto e não depende dos pontos (y_1, y_2) da secção transversal do tubo. Adicionando a condição de fronteira (4.9a), obtemos

$$\begin{cases} p^0 = p(x_1), & x_1 \in (0, L) \\ p(x_1) = p_b(x_1), & x_1 \in \{0, L\}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Agora, vamos analisar a equação do momento (4.4b) e a condição de fronteira (4.9b). Temos que

$$\begin{aligned} 2\mu \operatorname{div}_y(e_y u^0) &= \mu (\operatorname{div}_y(\nabla_y u^0) + \operatorname{div}_y((\nabla_u^0)^T)) \\ &= \mu(\Delta_y u^0 + \nabla_y(\operatorname{div}_y u^0)) = \mu \Delta u^0, \end{aligned}$$

devido a equação de continuidade (4.6a). Desta forma, a equação do momento (4.4b) fica

$$-\nabla_{x_1} p^0 - \nabla_y p^1 + \mu \Delta_y u^0 = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (4.12)$$

que pode ser expressa na forma

$$-\begin{pmatrix} \frac{\partial p^0}{\partial x_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial p^1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial p^1}{\partial y_2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \Delta_y u_1^0 \\ \Delta_y u_2^0 \\ \Delta_y u_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que decompõe-se no seguinte sistema

$$\begin{cases} -\frac{\partial p^0}{\partial x_1} + \mu \Delta_y u_1^0 = 0 & \text{em } \Omega \\ -\frac{\partial p^1}{\partial y_1} + \mu \Delta_y u_2^0 = 0 & \text{em } \Omega \\ -\frac{\partial p^1}{\partial y_2} + \mu \Delta_y u_3^0 = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.13)$$

Seja $(0, u_\alpha^0) \stackrel{\text{def}}{=} (0, u_2^0, u_3^0)$. Usando esta notação, reescrevemos a segunda e a terceira equação do sistema (4.13) como

$$-\nabla_y p^1 + \mu \Delta_y (0, u_\alpha^0) = 0. \quad (4.14)$$

Multiplicando esta equação por $(0, u_\alpha^0)$ e integrando em Ω , obtemos:

$$\int_{\Omega} [-\nabla_y p^1 \cdot (0, u_\alpha^0) + \mu u_2^0 \Delta_y u_2^0 + \mu u_3^0 \Delta_y u_3^0] dx_1 dy = 0.$$

Aplicando a fórmula de integração por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} [-p^1 \operatorname{div}_y u^0 + \mu |\nabla_y u_2^0|^2 + \mu |\nabla_y u_3^0|^2] dx_1 dy = 0.$$

Usando a equação de continuidade (4.6a), deduzimos que

$$\int_{\Omega} (|\nabla_y u_2^0|^2 + |\nabla_y u_3^0|^2) dx_1 dy = 0. \quad (4.15)$$

Esta condição implica que

$$\nabla_y u_2^0 = 0, \quad \nabla_y u_3^0 = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (4.16)$$

Em virtude da condição de Dirichlet, resulta que

$$u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Logo, o sistema (4.13) assume a forma

$$\begin{cases} -\frac{\partial p^0}{\partial x_1} + \mu \Delta_y u_1^0 = 0 & \text{em } \Omega \\ -\nabla_y p^1 = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.17)$$

Para decompor a condição de tensão (4.9b), vamos utilizar a propriedade geométrica de Γ_N .

Como $u_2^0 = u_3^0 = 0$ em Ω , segue que a condição de fronteira (4.9b) é equivalente à

$$p^1 \hat{n} = \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2} \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{n} \quad \text{sobre } \Gamma_N.$$

O vector normal de Γ_N é da forma $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, então

$$p^1 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N \quad (4.18a)$$

$$\nabla_y u_1^0 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_N. \quad (4.18b)$$

A segunda equação do sistema (4.17) estabelece que

$$p^1 = p^1(x_1), \quad x_1 \in (0, L), \quad (4.19)$$

como em (4.10) significa que a variação da pressão, até a aproximação de ordem um, ao longo do tubo depende apenas dos pontos x_1 da linha média do tubo recto e não depende dos pontos (y_1, y_2) da secção transversal do tubo. Deste modo, a condição de fronteira (4.18a) torna-se

$$p_1 = 0, \quad x_1 \in \{0, L\}. \quad (4.20)$$

4.3.2 Conservação do volume

Para dar uma caracterização relativamente à incompressibilidade do fluxo, vamos analisar a equação (4.5).

Agora, tomemos uma função escalar $\phi = \phi(x_1)$ continuamente diferenciável em Ω , tal que $\phi(0) = \phi(L) = 0$. Multiplicando a equação de continuidade (4.6b) pela função ϕ e tomando o integral sobre Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} \phi \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \text{div}_y u^1 \right) dx = 0. \quad (4.21)$$

Note que

$$\text{div}(\phi(u_1^0, u_2^1, u_3^1)) = u_1^0 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \phi \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \text{div}_y u^1 \right).$$

Logo, a equação (4.21) pode ser escrita na forma

$$\int_{\Omega} \text{div}(\phi(u_1^0, u_2^1, u_3^1)) dx - \int_{\Omega} u_1^0 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx = 0.$$

Em virtude do teorema de divergência, temos

$$\int_{\Gamma^D} \phi(u_1^0, u_2^1, u_3^1) \cdot \hat{n} dS + \int_{\Gamma^N} \phi(u_1^0, u_2^1, u_3^1) \cdot \hat{n} dS - \int_{\Omega} u_1^0 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx = 0. \quad (4.22)$$

Como $(u_1^0, u_2^1, u_3^1) = 0$ em Γ_D por (4.7) e $\phi = 0$ em $\{0, L\}$, os integrais de superfície que aparecem no primeiro membro da equação (4.22) são iguais a zero. Logo,

$$- \int_{\Omega} u_1^0(x_1, y) \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx = - \int_{(0,L)} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \left(\int_{D(x_1)} u_1^0(x_1, y) dy \right) dx_1 = 0.$$

Pela fórmula de integração por partes, resulta

$$\int_{(0,L)} \phi(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{D(x_1)} u_1^0(x_1, y) dy \right) dx_1 = 0. \quad (4.23)$$

Uma vez que esta relação é válida para qualquer função continuamente diferenciável $\phi(x_1)$, concluímos que a condição de incompressibilidade para o termo de ordem zero da velocidade u^0 é satisfeita se

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{D(x_1)} u_1^0(x_1, y) dy \right) = 0, \quad x_1 \in (0, L). \quad (4.24)$$

Para completar a caracterização dos termos u^0 e p^0 nas expansões assintóticas da velocidade e pressão (4.2), precisamos analisar a solvabilidade da primeira equação em (4.17) com uma condição de fronteira adequada para deduzir a lei de Poiseuille unidimensional, isto é, a velocidade e a pressão são relacionadas por uma dependência linear. Além disso, usando a condição (4.24) obtemos a equação que caracteriza o termo de ordem zero da pressão, a chamada equação unidimensional de Reynolds. Para tal, precisamos introduzir a noção de permeabilidade que são funções que dependem da geometria do domínio.

4.4 Função permeabilidade

Permeabilidade é uma propriedade que caracteriza a capacidade de um meio transportar um fluido. Este conceito provém do estudo de problemas em meios porosos e desempenha um papel importante no controlo da taxa de fluxo através da secção transversal do tubo. Nesta secção, definimos a função permeabilidade do nosso domínio.

Definição 4.4.1 ([12, p. 5]) A solução ψ do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta_y \psi = 1 & \text{em } \Omega \\ \psi = 0 & \text{sobre } \Gamma_D \end{cases} \quad (4.25)$$

é chamada *função permeabilidade* do domínio Ω . Isto é, para cada $x_1 \in (0, L)$, $\psi(x_1, \cdot)$ é

solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_y \psi(x_1, \cdot) = 1 & \text{em } D(x_1) \\ \psi(x_1, \cdot) = 0 & \text{sobre } \partial D(x_1). \end{cases} \quad (4.26)$$

Definição 4.4.2 ([12, p. 5]) A permeabilidade do domínio $D(x_1)$ é definida como

$$\lambda(x_1) = \int_{D(x_1)} \psi(x_1, y) dy \quad (x_1 \in (0, L)). \quad (4.27)$$

Nosso objectivo é resolver o problema (4.25) que é equivalente ao problema (4.26) colocado no disco $D(x_1)$. Portanto é conveniente fazermos a mudança de coordenadas cartesianas para o sistema de coordenadas polares como se segue:

$$(y_1, y_2) = (s \cos \theta, s \sin \theta), \quad (s, \theta) = \left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \arcsin \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right) \right). \quad (4.28)$$

O domínio $D(x_1)$ em coordenadas polares fica expresso por

$$D = \{(s, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq s < r(x_1)\}.$$

Vamos agora definir o operador de Laplace Δ_y em termos de coordenadas polares. De acordo com a regra de cadeia, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial s}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{\partial s}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases} \quad (4.29)$$

Notemos que

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} = \cos \theta, \quad \frac{\partial s}{\partial y_2} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y_1} = -\frac{\sin \theta}{s}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y_2} = \frac{\cos \theta}{s}.$$

Substituindo estas relações em (4.29), obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\sin \theta}{s} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\cos \theta}{s} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}$$

Mais uma vez, aplicando a regra de cadeia, obtemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} = \left(\frac{\partial s}{\partial y_1} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial s}{\partial y_1} \frac{\partial \theta}{\partial y_1} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y_1} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y_1^2} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y_1^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.30a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = \left(\frac{\partial s}{\partial y_2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial s}{\partial y_2} \frac{\partial \theta}{\partial y_2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y_2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y_2^2} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y_2^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.30b)$$

Calculando as derivadas parciais puras de segunda ordem das funções s e θ , obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 s}{\partial y_1^2} &= \frac{1}{s} \sin^2 \theta, & \frac{\partial^2 s}{\partial y_2^2} &= \frac{1}{s} \cos^2 \theta \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y_1^2} &= \frac{1}{s^2} \sin 2\theta, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial y_2^2} &= -\frac{1}{s^2} \sin 2\theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\sin 2\theta}{s} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\sin 2\theta}{s^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.31a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\sin 2\theta}{s} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \theta}{s} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\sin 2\theta}{s^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.31b)$$

Adicionando (4.31a) e (4.31b) ordenadamente, obtemos a expressão do operador de Laplace em coordenadas polares

$$\Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Lema 4.4.1 *De acordo com a nossa geometria, a permeabilidade ψ e a permeabilidade do domínio λ são dadas por*

$$\psi(x_1, y) = \frac{r^2(x_1) - |y|^2}{4}, \quad (4.32a)$$

$$\lambda(x_1) = \frac{\pi r^4(x_1)}{8}. \quad (4.32b)$$

Demonstração. Assumindo que a função permeabilidade ψ depende apenas da variável radial $s = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, o problema de fronteira (4.26) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial s} = 1, & \text{se } 0 \leq s < r(x_1) \\ \psi = 0, & \text{se } s = r(x_1). \end{cases} \quad (4.33)$$

Seja $w(s) = \frac{\partial \psi}{\partial s}$. Então, a equação $-\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial s} = 1$ pode ser escrita como

$$\frac{dw}{ds} + \frac{1}{s} w = -1.$$

Resolvendo esta equação pelo método de factor integrante, obtemos a seguinte solução geral

$$w(s) = -\frac{s}{2} + \frac{c_1}{s}.$$

Daqui segue que

$$\psi(s) = -\frac{s^2}{4} + c_1 \ln s + c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração. Para evitar a singularidade no ponto $s = 0$, escolhemos $c_1 = 0$. Deste modo, a função permeabilidade assume a forma

$$\psi(s) = -\frac{1}{4}s^2 + c_2.$$

Para determinar a constante c_2 , vamos utilizar a condição de fronteira. Com efeito,

$$\psi(s)|_{s=r(x_1)} = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{4}r^2(x_1).$$

Assim,

$$\psi(s) = \frac{1}{4}(r^2(x_1) - s^2),$$

Voltando às coordenadas cartesianas, a função permeabilidade fica expressa por

$$\psi(x_1, y) = \frac{r^2(x_1) - |y|^2}{4}, \quad (4.34)$$

A permeabilidade do domínio $D(x_1)$ é dada por

$$\lambda(x_1) = \int_{D(x_1)} \psi(x_1, y) dy = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(x_1)} (r^2(x_1) - s^2) s ds = \frac{\pi r^4(x_1)}{8}. \quad \square$$

4.5 Lei de Poiseuille e equação de Reynolds

Nesta secção, apresentamos um dos resultados principais desta pesquisa, que é a derivação de uma forma generalizada da lei de Poiseuille.

Teorema 4.5.1 *Seja $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ a solução do problema de Stokes (4.1) com as expansões assintóticas (4.2). Então, a primeira componente do termo de ordem zero da velocidade $u^0 = (u_1^0, 0, 0)$ é*

$$u_1^0(x_1, y) = -\frac{1}{4\mu} (r^2(x_1) - |y|^2) \frac{\partial p^0}{\partial x_1}(x_1) \quad (4.35)$$

e o termo de ordem zero da pressão é determinado unicamente pela seguinte equação unidimensional de Reynolds

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(r^4(x_1) \frac{\partial p^0}{\partial x_1} \right) = 0 & x_1 \in (0, L) \\ p^0 = p_b, & x_1 \in \{0, L\}. \end{cases} \quad (4.36)$$

Adicionalmente, os termos de ordem zero da pressão p^0 e velocidade u_1^0 são definidos explicitamente por

$$p^0(x_1) = \frac{p_b(L) - p_b(0)}{\int_0^L r^4(\xi) d\xi} \int_0^{x_1} r^{-4}(\xi) d\xi + p_b(0), \quad (4.37)$$

$$u_1^0(x_1, y) = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{r^2(x_1) - |y|^2}{r^4(x_1)} \right) \frac{p_b(L) - p_b(0)}{\int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi} \quad (4.38)$$

Demonstração. Como $p^0 = p^0(x_1)$ por (4.10), então a equação do momento (4.17) pode ser expressa na forma

$$\begin{cases} -\Delta_y u_1^0(x_1, \cdot) &= \eta(x_1) & \text{em } D(x_1) \\ u_1^0(x_1, \cdot) &= 0 & \text{sobre } \partial D(x_1), \end{cases} \quad (4.39)$$

onde $x_1 \in (0, L)$ é um parâmetro e $\eta(x_1) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p^0}{\partial x_1}(x_1)$ pode ser considerada como uma constante real. Multiplicando a equação

$$-\Delta_y \psi(x_1, \cdot) = 1$$

pela constante $\eta(x_1)$, obtemos

$$-\Delta_y (\eta(x_1) \psi(x_1, \cdot)) = \eta(x_1). \quad (4.40)$$

Esta equação mostra que $\eta(x_1) \psi(x_1, y)$, onde ψ é a solução de (4.25), é solução do problema (4.39). Deste modo,

$$u_1^0(x_1, y) = \eta(x_1) \psi(x_1, y).$$

Desta equação e de (4.34), obtemos

$$u_1^0(x_1, y) = -\frac{1}{4\mu} (r^2(x_1) - |y|^2) \frac{\partial p^0}{\partial x_1}(x_1). \quad (4.41)$$

De seguida, inserindo (4.41) na condição de incompressibilidade (4.24) e impondo a condição de fronteira de tensão normal, obtemos a equação unidimensional de Reynolds (4.36).

Integrando a equação de Reynold, obtemos

$$p^0(x_1) = a_1 \int_0^{x_1} r^{-4}(\xi) d\xi + a_2, \quad (4.42)$$

onde a_1 e a_2 são constantes. Utilizando as condições de fronteira

$$\begin{cases} p^0(0) &= p_b(0) \\ p^0(L) &= p_b(L), \end{cases}$$

obtemos

$$a_2 = p_b(0) \quad \text{e} \quad a_1 = \frac{p_b(L) - p_b(0)}{\int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi}.$$

Substituindo os valores das constantes a_1 e a_2 na equação (4.42), obtemos

$$p^0(x_1) = \frac{p_b(L) - p_b(0)}{\int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi} \int_0^{x_1} r^{-4}(\xi) d\xi + p_b(0). \quad (4.43)$$

Derivando (4.43) em relação a x_1 e substituindo o resultado na expressão (4.41), obtemos (4.38). $\square$

Observação 4.5.1 De (4.38) vemos que u_1^0 não satisfaz a condição de fronteira (4.18b) pontualmente em Γ_N . Isto parece ser uma contradição. No entanto, a condição de fronteira é satisfeita num sentido médio, isto é,

$$\frac{1}{|\Gamma_N|} \int_{\Gamma_N} \nabla_y u_1^0 dS = 0.$$

Observação 4.5.2 Notemos que todas as componentes da velocidade u^0 são iguais a zero na superfície lateral do tubo, mas o divergente do campo de velocidade não é nulo. Isto significa que a aproximação de ordem zero satisfaz a condição de não deslizamento mas não conserva o volume. Então, é preciso fazer uma correcção de modo a obter uma aproximação que conserve o volume.

Capítulo 5

Problema aproximado

Nosso objetivo neste capítulo é construir uma solução aproximada para o problema original (4.1). A ideia geral é que quanto mais termos da expansão assintótica forem incluídos na aproximação, ela se torna mais precisa. Assim, faz sentido calcular os termos de primeira ordem e, possivelmente, também os de segunda ordem nas expansões da velocidade e da pressão.

5.1 Termos complementares

Nesta secção, determinamos o termo de ordem um da velocidade de modo a obter uma velocidade que seja consistente com a conservação do volume. Além disso, determinamos mais dois termos da pressão p^1 e p^2 para obter uma melhor aproximação que será construída na secção 5.2. Para tal, começamos por extrair a equação do momento correspondente aos termos de ε^1 :

$$-\nabla_{x_1} p^1 - \nabla_y p^2 + 2\mu \left\{ \operatorname{div}_y (e(\nabla_{x_1} u^0) + e(\nabla_y u^1)) + \operatorname{div}_{x_1} e(\nabla_y u^0) \right\} = 0 \text{ em } \Omega \quad (5.1)$$

e adicionamos a condição de Dirichlet para o termo de ordem um da velocidade

$$u^1 = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D. \quad (5.2)$$

Similarmente à análise da equação do momento (4.4b), efectuamos alguns cálculos para simplificar o primeiro membro da equação (5.1). Notemos que

$$\operatorname{div}_y (e(\nabla_{x_1} u^0) + e(\nabla_y u^1)) = \operatorname{div}_y (e(\nabla_{x_1} u^0)) + \frac{1}{2} (\Delta_y u^1 + \nabla_y (\operatorname{div}_y u^1)).$$

Da definição de $e(\nabla_{x_1} u^0)$ e $e(\nabla_y u^0)$ e tomando em conta que $u^0 = (u_1^0, 0, 0)$, segue que

$$e(\nabla_{x_1} u^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e(\nabla_y u^0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} & \frac{\partial u^0}{\partial y_2} \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de onde resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y(e(\nabla_{x_1} u^0)) &= 0 \\ \operatorname{div}_{x_1}(e(\nabla_y u^0)) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u^0}{\partial y_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u^0}{\partial y_2} \right) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_1} \right) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \nabla_y \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Assim, a equação do momento (5.1) é transformada em

$$-\nabla_{x_1} p^1 - \nabla_y p^2 + \mu \Delta_y u^1 + \mu \nabla_y \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \operatorname{div}_y u^1 \right) = 0,$$

que devido a equação de continuidade (4.6b) reduz-se em

$$-\nabla_{x_1} p^1 - \nabla_y p^2 + \mu \Delta_y u^1 = 0.$$

Esta equação decompõe-se no seguinte sistema

$$\begin{cases} -\frac{\partial p^1}{\partial x_1} + \mu \Delta_y u_1^1 &= 0 & \text{em } \Omega \\ -\frac{\partial p^2}{\partial y_1} + \mu \Delta_y u_2^1 &= 0 & \text{em } \Omega \\ -\frac{\partial p^2}{\partial y_2} + \mu \Delta_y u_3^1 &= 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5.3)$$

Antes começar com a análise da solvabilidade deste sistema, vamos estabelecer a condição que garante a conservação de volume para o termo de ordem 1 da velocidade. Integrando a equação de continuidade (4.6c) em Ω e usando argumentos similares aos da dedução da condição de incompressibilidade para o termo da velocidade de ordem zero, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{D(x_1)} u_1^1(x_1, y) dy \right) = 0, \quad x_1 \in (0, L). \quad (5.4)$$

Agora, voltemos ao sistema (5.3). Adicionando a primeira equação do sistema (5.3) a condição

de Dirichlet (5.2), obtemos

$$\begin{cases} -\frac{\partial p^1}{\partial x_1} + \mu \Delta_y u_1^1 = 0 & \text{em } \Omega \\ u_1^1 = 0 & \text{sobre } \Gamma_D. \end{cases} \quad (5.5)$$

A função p^1 não depende da variável y (equação (4.19)), então esta equação pode ser expressa na forma

$$\begin{cases} -\Delta_y u_1^1(x_1, \cdot) = \eta(x_1) & \text{em } D(x_1) \\ u_1^1(x_1, \cdot) = 0 & \text{sobre } \partial D(x_1), \end{cases} \quad (5.6)$$

onde $x_1 \in (0, L)$ é um parâmetro e $\eta(x_1) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p^1}{\partial x_1}(x_1)$. De modo similar ao cálculo da primeira componente de u^0 , obtemos

$$u_1^1(x_1, y) = -\frac{1}{4\mu} (r^2(x_1) - |y|^2) \frac{\partial p^1}{\partial x_1}(x_1). \quad (5.7)$$

Substituindo esta relação na condição (5.4) e impondo a condição de fronteira (4.20), obtemos o seguinte problema de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(r^4(x_1) \frac{\partial p^1}{\partial x_1} \right) = 0 & x_1 \in (0, L) \\ p^1 = 0, & x_1 \in \{0, L\}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Resolvendo esta equação, encontramos

$$p^1(x_1) \equiv 0 \quad \text{em } [0, L]. \quad (5.9)$$

Desta relação e de (5.5) segue que

$$u_1^1 = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (5.10)$$

Deste modo, o termo de ordem um da velocidade é da forma

$$u^1 = (0, u_2^1, u_3^1). \quad (5.11)$$

Para determinar as componentes u_2^1 e u_3^1 devemos resolver a segunda e terceira equação do sistema (5.3) com a condição de Dirichlet (5.2) e tomando em conta a equação de continuidade (4.6c), ou seja, devemos resolver o seguinte problema de Stokes

$$\begin{cases} -\nabla_{y_1} p^2 + \mu \Delta_y (0, u_\alpha^1) = 0 & \text{em } \Omega \\ \operatorname{div}_y u^1 = -\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} & \text{em } \Omega \\ u^1 = 0 & \text{sobre } \Gamma_D. \end{cases} \quad (5.12)$$

Este problema não é homogêneo, então o cálculo da sua solução é mais exigente em relação ao cálculo da solução do problema homogêneo, o que nos dá uma oportunidade para investigar outras ferramentas de análise de solvabilidade.

Vamos agora enunciar um resultado de [30, Teorema 2.4] que estabelece uma condição de existência e unicidade de solução do problema de Stokes não homogêneo.

Teorema 5.1.1 *Seja Ω um conjunto aberto e limitado da classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^n$. Sejam dadas as funções $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, tais que*

$$\int_{\Omega} g dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot n dS. \quad (5.13)$$

Então existe uma solução $u \in H^1(\Omega)$, $p \in L_2(\Omega)$ do problema de Stokes não homogêneo

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f & \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} u = g & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.14)$$

u é única e p é única até a adição de uma constante.

Este Teorema funciona como base para a resolução do problema de Stokes não homogêneo, veja por exemplo [30, Proposição 2.3]. A ideia principal consiste em considerar subproblemas que podem ser resolvidos por técnicas sobejamente conhecidas, em particular, o teorema nos permite determinar explicitamente os termos u_2^1 , u_3^1 e p^2 no seguinte resultado:

Teorema 5.1.2 *Seja $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ a solução do problema de Stokes (4.1) com as expansões assintóticas (4.2). Então:*

1. *As componentes u_2^1 e u_3^1 do termo de ordem um da velocidade são dadas por*

$$u_2^1 = -\frac{p_b(L) - p_b(0)}{4\mu \int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi} \left(\frac{r^2(x_1) - y_1^2 - y_2^2}{r^5(x_1)} \right) y_1 \frac{dr}{dx_1}(x_1) \quad (5.15a)$$

$$u_3^1 = -\frac{p_b(L) - p_b(0)}{4\mu \int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi} \left(\frac{r^2(x_1) - y_1^2 - y_2^2}{r^5(x_1)} \right) y_2 \frac{dr}{dx_1}(x_1) \quad (5.15b)$$

2. *O termo de ordem dois da pressão p^2 é dado por*

$$p^2(x_1, y) = -\frac{p_b(L) - p_b(0)}{4 \int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi} \left(\frac{2}{r^3(x_1)} - \frac{4(y_1^2 + y_2^2)}{r^5(x_1)} \right) \frac{dr}{dx_1}(x_1) + c(x_1), \quad (5.16)$$

onde

$$c(x_1) = a_1 \int_0^{x_1} r^{-4}(\xi) d\xi + \frac{p_b(L) - p_b(0)}{3 \int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi} \int_0^{x_1} \{[r'(\xi)]^2 + r(\xi)r''(\xi)\} r^{-4}(\xi) d\xi,$$

com

$$a_1 = - \frac{[p_b(L) - p_b(0)] \int_0^L \{ [r'(\xi)]^2 + r(\xi)r''(\xi) \} r^{-4}(\xi) d\xi}{3 \left[\int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi \right]^2}.$$

Demonstração. O problema (5.12) não depende de alguma derivada das funções u_2^1 , u_3^1 e p^2 em relação à x_1 . Então, podemos considerar $x_1 \in]0, L[$ como um parâmetro e trabalhar com o problema no disco $D(x_1)$:

$$\begin{cases} \Delta_y(0, u_\alpha^1) = \frac{1}{\mu} \nabla_y p^2 & \text{em } D(x_1) \\ \operatorname{div}_y u^1 = -\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \stackrel{\text{def}}{=} g & \text{em } D(x_1) \\ u^1 = 0 & \text{sobre } \partial D(x_1). \end{cases} \quad (5.17)$$

Primeiro, mostremos que problema satisfaz a condição de compatibilidade (5.13). Do Teorema 4.5.1 temos que

$$u_1^0 = \beta \left(\frac{1}{r^2(x_1)} - \frac{y_1^2 + y_2^2}{r^4(x_1)} \right), \quad \text{onde } \beta \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{p_b(L) - p_b(0)}{4\mu \int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi}.$$

Além disso,

$$g = -\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} = \beta \left(\frac{2}{r^3(x_1)} - \frac{4(y_1^2 + y_2^2)}{r^5(x_1)} \right) \frac{dr}{dx_1}(x_1) \quad \text{e} \quad \varphi = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_D g dy &= \beta \frac{dr}{dx_1}(x_1) \int_D \left(\frac{2}{r^3(x_1)} - \frac{4(y_1^2 + y_2^2)}{r^5(x_1)} \right) dy \\ &= \beta \frac{dr}{dx_1}(x_1) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(x_1)} \left(\frac{2}{r^3(x_1)} - \frac{4s^2}{r^5(x_1)} \right) s ds \\ &= 2\beta\pi \frac{dr}{dx_1}(x_1) \left(\frac{s^2}{r^3(x_1)} - \frac{s^4}{r^5(x_1)} \right) \Big|_{s=0}^{s=r(x_1)} = 0, \end{aligned}$$

o que mostra que o problema (5.17) satisfaz a condição de compatibilidade. Então, pelo Teorema 5.1.1 o problema admite uma solução (u_α^1, p^2) tal que u_α^1 é única e p^2 é única até a adição de uma função que depende apenas de x_1 . A determinação da solução do problema será feita em três etapas.

Passo 1. *Primeiro problema auxiliar.* Consideremos o seguinte problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta_y \Psi = g & \text{em } D(x_1) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial D(x_1), \end{cases} \quad (5.18)$$

que admite uma única solução até a adição de uma função arbitrária de x_1 uma vez que a condição de compatibilidade é satisfeita:

$$\int_{D(x_1)} g dy = 0.$$

Para resolver o problema (5.18), vamos aplicar mais uma vez a mudança de variável (4.28). Começamos por transformar a condição de fronteira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial n} = \nabla_y \Psi \cdot n &= \left(0, \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}, \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} \right) \cdot (0, \cos \theta, \sin \theta) \\ &= \cos \theta \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} + \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} = 0. \end{aligned}$$

Utilizando as relações

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\sin \theta}{s} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y_2} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\sin \theta}{s} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

obtemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0 \quad \text{sobre } \partial D(x_1).$$

Assumindo que a função Ψ depende apenas da variável radial s e tendo em conta a definição da função g , o problema (5.18) pode ser escrito como segue

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \Psi}{\partial s} = \beta \left(\frac{2}{r^3(x_1)} - \frac{4s^2}{r^5(x_1)} \right) \frac{dr}{dx_1}(x_1), & \text{se } 0 \leq s < r(x_1) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0, & \text{se } s = r(x_1). \end{cases} \quad (5.19)$$

Utilizando o método do factor integrante, pode-se mostrar que a solução geral da equação de Poisson é

$$\psi(x_1, s) = \frac{\beta}{4} \left(\frac{2}{r^3(x_1)} - \frac{s^2}{r^5(x_1)} \right) s^2 \frac{dr}{dx_1}(x_1) + b_1(x_1) \ln s + b_2(x_1),$$

onde b_1 e b_2 são as constantes de integração. A função $f(s) = \ln s$ tem singularidade no ponto $s = 0$, então $b_1 = 0$. Logo,

$$\Psi(x_1, s) = \frac{\beta}{4} \left(\frac{2}{r^3(x_1)} - \frac{s^2}{r^5(x_1)} \right) s^2 \frac{dr}{dx_1}(x_1) + b_2(x_1). \quad (5.20)$$

Note que

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial s} \right]_{s=r(x_1)} = \beta \left[\left(\frac{s}{r^3(x_1)} - \frac{s^3}{r^5(x_1)} \right) \frac{dr}{dx_1}(x_1) \right]_{s=r(x_1)} = 0,$$

isto mostra que a condição de fronteira é verificada. Deste modo, a relação (5.20) expressa a solução do problema (5.19). Novamente, usando a mudança de variável (4.28) obtemos a

expressão da função ψ em termos de coordenadas cartesianas

$$\Psi(x_1, y) = \frac{\beta}{4} \left(\frac{2}{r^3(x_1)} - \frac{y_1^2 + y_2^2}{r^5(x_1)} \right) (y_1^2 + y_2^2) \frac{dr}{dx_1}(x_1) + a_3(x_1). \quad (5.21)$$

Passo 2. *Segundo problema auxiliar.* Definamos o campo vectorial V como segue

$$V \stackrel{\text{def}}{=} (0, u_2^1, u_3^1) - \nabla_y \Psi.$$

De (5.17) e (5.18) segue que

$$\begin{cases} \Delta_y V &= \Delta_y(0, u_2^1, u_3^1) - \Delta_y(\nabla_y \Psi) = \frac{1}{\mu} \nabla_y p^2 - \nabla_y g \\ \operatorname{div}_y V &= \operatorname{div}_y u^1 - \Delta_y \Psi = g - g = 0. \end{cases} \quad (5.22)$$

Em seguida, procuramos determinar a condição de fronteira satisfeita por V . Seja $\hat{t}$ o vector tangente unitário em qualquer ponto da circunferência $\partial D(x_1)$, ou seja, $\hat{t} = (0, -\sin \theta, \cos \theta)$. Então, de (5.22), (5.17) e (5.18) segue que a função V satisfaz:

$$\begin{cases} V \cdot \hat{n} = 0 & \text{sobre } \partial D(x_1) \\ V \cdot \hat{t} = -\nabla_y \Psi \cdot \hat{t} = -\frac{1}{r(x_1)} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0 & \text{sobre } \partial D(x_1). \end{cases} \quad (5.23)$$

Estas duas condições implicam que

$$V = 0 \quad \text{sobre } \partial D(x_1).$$

Portanto, o par (V, p^2) satisfaz o seguinte problema homogêneo

$$\begin{cases} \Delta_y V &= \frac{1}{\mu} \nabla_y p^2 - \nabla_y g & \text{em } D(x_1) \\ \operatorname{div}_y V &= 0 & \text{em } D(x_1) \\ V &= 0 & \text{sobre } \partial D(x_1). \end{cases} \quad (5.24)$$

Pelo Teorema 5.14, este problema tem uma solução (V, p^2) tal que V é única e p^2 é única até à adição de uma função arbitrária de x_1 . É fácil verificar que esta solução é dada por

$$\begin{aligned} V &= 0 \\ p^2(x_1, y) &= \mu g(x_1, y) + c(x_1) \\ &= -\mu \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(x_1, y) + c(x_1) \\ &= \mu \beta \left(\frac{2}{r^3(x_1)} - \frac{4(y_1^2 + y_2^2)}{r^5(x_1)} \right) \frac{dr}{dx_1}(x_1) + c(x_1), \end{aligned}$$

onde c é uma função arbitrária de x_1 . Uma vez que $(0, u_\alpha^1) = V + \nabla_y \Psi$ e $V = 0$, segue que $(0, u_\alpha^1) = \nabla_y \Psi$ o que nos dá as relações (5.15a) e (5.15b). Em suma, temos

$$\begin{aligned} u_1^1(x_1, y) &= 0, \\ u_2^1(x_1, y) &= \beta \frac{r^2(x_1) - |y|^2}{r(x_1)^5} \frac{dr}{dx_1}(x_1) y_1, \\ u_3^1(x_1, y) &= \beta \frac{r^2(x_1) - |y|^2}{r(x_1)^5} \frac{dr}{dx_1}(x_1) y_2, \\ p^2(x_1, y) &= -\mu \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(x_1, y) + c(x_1). \end{aligned}$$

Passo 3. Unicidade da pressão. Precisamos determinar a função $c(x_1)$ para que o termo de ordem dois da pressão fique bem determinado. Para tal, começamos por extrair a equação de momento correspondente aos termos de ε^2 :

$$\begin{aligned} & -\nabla_{x_1} p^2 - \nabla_y p^3 \\ & + 2\mu \{ \operatorname{div}_y (e(\nabla_{x_1} u^1) + e(\nabla_y u^2)) + \operatorname{div}_{x_1} (e(\nabla_{x_1} u^0) + e(\nabla_y u^1)) \} = 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

e adicionamos a condição de fronteira de Dirichlet para o termo de ordem 2 da velocidade

$$u^2 = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_D. \quad (5.26)$$

Com objectivo de simplificar a equação (5.25), analisamos alguns termos:

1. Da definição de $e(\nabla_{x_1} u^1)$, $e(\nabla_y u^1)$ e tendo que conta que $u_1^1 = 0$, segue que

$$2\mu \operatorname{div}_y (e(\nabla_{x_1} u^1)) = \begin{pmatrix} \mu \frac{\partial}{\partial x_1} (\operatorname{div}_y u^1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad 2\mu \operatorname{div}_{x_1} (e(\nabla_y u^1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Com base na equação de continuidade (4.6c), concluímos que

$$2\mu \operatorname{div}_y (e(\nabla_y u^2)) = \mu \Delta_y u^2 + \mu \nabla_y (\operatorname{div}_y u^2) = \mu \Delta_y u^2 = \begin{pmatrix} \mu \Delta_y u_1^2 \\ \mu \Delta_y u_2^2 \\ \mu \Delta_y u_3^2 \end{pmatrix}$$

3. Além disso da definição de $e(\nabla_{x_1} u^0)$ e tendo em conta que $u_2^0 = u_3^0 = 0$, resulta que

$$2\mu \operatorname{div}_{x_1}(e(\nabla_{x_1} u^0)) = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_1^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando estas relações 1, 2 e 3, deduzimos que a equação do momento (5.25) pode ser escrita da seguinte forma:

$$-\frac{\partial p^2}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \operatorname{div}_y u^1 \right) + \mu \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + \mu \Delta_y u_1^2 = 0 \quad (5.27a)$$

$$-\frac{\partial p^3}{\partial y_1} + \mu \Delta_y u_2^2 = 0 \quad (5.27b)$$

$$-\frac{\partial p^3}{\partial y_2} + \mu \Delta_y u_3^2 = 0 \quad (5.27c)$$

De (4.6b), (5.27a) e (5.26), obtemos o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta_y u_1^2 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p^2}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} = -2 \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\mu} \frac{dc}{dx_1} & \text{em } \Omega \\ u_1^2 = 0 & \text{sobre } \Gamma_D. \end{cases} \quad (5.28)$$

Calculando a segunda derivada parcial da função u_1^0 em relação à x_1 , obtemos

$$\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1^2}(x_1, y) = \beta g_1(x_1) + \beta g_2(x_1)|y|^2,$$

onde

$$g_1(x_1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{6}{r^4(x_1)}(r'(x_1))^2 - \frac{2}{r^3(x_1)}r''(x_1) \quad \text{e} \quad g_2(x_1) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{20}{r^6(x_1)}(r'(x_1))^2 + \frac{4}{r^5(x_1)}r''(x_1).$$

Como anteriormente, consideramos $x_1 \in (0, L)$ como um parâmetro. Então, o sistema (5.28) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \Delta_y u_1^2 = -2\beta g_1 + \frac{1}{\mu} \frac{dc}{dx_1} - 2\beta g_2|y|^2 & \text{em } D(x_1) \\ u_1^2 = 0, & \text{sobre } \partial D(x_1). \end{cases} \quad (5.29)$$

Logo, a solução do problema pode ser escrita como

$$u_1^2 = \left(2\beta g_1 - \frac{1}{\mu} \frac{dc}{dx_1} \right) \psi + 2\beta g_2 \psi_1,$$

onde ψ_1 é a solução do seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} \Delta_y \psi_1 = -|y|^2 & \text{em } D(x_1) \\ \psi_1 = 0 & \text{sobre } \partial D(x_1). \end{cases}$$

Portanto,

$$u_1^2(x_1, y) = \left[2\beta g_1(x_1) - \frac{1}{\mu} \frac{dc}{dx_1} \right] \frac{r(x_1)^2 - |y|^2}{4} + \beta g_2(x_1) \frac{r^4(x_1) - |y|^4}{8}. \quad (5.30)$$

Resta apenas determinar a função $c(x_1)$ que aparece nas expressões das funções p^2 e u_1^2 . Para tal, vamos utilizar a equação de conservação de volume do termo de ordem 2 da velocidade:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_{D(x_1)} u_1^2(x_1, y) dy \right) = 0, \quad x_1 \in (0, L), \quad (5.31)$$

que é deduzida de modo similar a condição (4.24). Agora, pegamos a expressão (5.30) e substituímos em (5.31). De seguida, fazemos a passagem do integral para coordenadas polares, calculamos o integral, tomamos em conta a definição de g_1 e g_2 e efectuamos algumas simplificações:

$$\frac{d}{dx_1} \left\{ r^4 \frac{dc}{dx_1} + \frac{4}{3} \mu \beta [r'(x_1)]^2 + \frac{4}{3} \mu \beta r(x_1) r''(x_1) \right\} = 0. \quad (5.32)$$

Vamos resolver esta equação diferencial. Começamos por integrar a equação em relação a variável x_1 , de seguida isolamos a derivada da função $c(x_1)$ e por último integramos em relação a x_1 , o que nos dá a seguinte solução

$$c(x_1) = a_1 \int_0^{x_1} r^{-4}(\xi) d\xi - \frac{4\mu\beta}{3} \int_0^{x_1} \{ [r'(\xi)]^2 + r(\xi) r''(\xi) \} r^{-4}(\xi) d\xi + a_2, \quad (5.33)$$

onde a_1 e a_2 são constantes que devem ser determinadas. Para tal, é preciso adicionar condições de fronteiras adequadas. Neste caso, escolhemos a condição de fronteira (4.9c) uma vez que ela relaciona o termo p^2 , que depende da função $c(x_1)$ e os termos u^0 e u^1 que estão bem definidos. Analisando os termos presentes na condição (4.9c), vemos que:

$$e(\nabla_y u^1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial u_2^1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2^1}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_1} \\ 0 & \frac{\partial u_2^1}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_1} & 2 \frac{\partial u_3^1}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \quad e(\nabla_{x_1} u^0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, a condição de fronteira (4.9c) pode ser expressa como

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p^2 + 2\mu \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & -p^2 + 2\mu \frac{\partial u_2^1}{\partial y_1} & \mu \left(\frac{\partial u_2^1}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_1} \right) \\ 0 & \mu \left(\frac{\partial u_2^1}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_1} \right) & -p^2 + 2\mu \frac{\partial u_3^1}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sobre } \Gamma_N.$$

Daqui, deduzimos que o termo da pressão de ordem 2 satisfaz a seguinte condição de fronteira:

$$p^2 = 2\mu \frac{\partial u^0}{\partial x_1} \quad \text{sobre } \Gamma_N. \quad (5.34)$$

Da definição da fronteira Γ_N e tendo em conta que $p^2(x_1, y) = -\mu \frac{\partial u^0}{\partial x_1} + c(x_1)$, segue que a função $c(x_1)$ satisfaz as seguintes condições de fronteira

$$\begin{cases} c(0) = 3\mu \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(0, y) = -3\mu\beta \left(\frac{2}{r^3(0)} - \frac{4(y_1^2 + y_2^2)}{r^5(0)} \right) \frac{dr}{dx_1}(0), & |y| < r(0) \\ c(L) = 3\mu \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(L, y) = -3\mu\beta \left(\frac{2}{r^3(L)} - \frac{4(y_1^2 + y_2^2)}{r^5(L)} \right) \frac{dr}{dx_1}(L), & |y| < r(L). \end{cases}$$

Mais uma vez, precisamos ser cautelosos com a interpretação da condição de fronteira (5.34) que parece ser uma contradição. A condição é satisfeita pontualmente se acrescentarmos a hipótese *ad hoc* de que $dr/dx_1 = 0$ sobre Γ_N .

$$c(0) = c(L) = 0. \quad (5.35)$$

Uma interpretação mais fraca é que a condição é válida apenas no sentido de valor médio. De facto, integrando sobre Γ_N , obtemos

$$\int_{\Gamma_N} p^2 dS = 2\mu \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} dS = 0,$$

o que também implica (5.35). Aplicando a condição (5.35), obtemos

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_1 &= \frac{4\mu\beta \int_0^L \{[r'(\xi)]^2 + r(\xi)r''(\xi)\} r^{-4}(\xi) d\xi}{3 \int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi}. \end{aligned}$$

Portanto, a função $c(x_1)$ fica determinada unicamente. Consequentemente o termo de ordem 2 da pressão também fica determinado unicamente por (5.16). $\square$

5.2 Correccão de divergência e problema aproximado

Nesta secção, escolhemos uma aproximação para a solução $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ do problema de Stokes (4.1). Uma escolha natural para o campo de velocidade seria o termo da velocidade de ordem zero u^0 que determinamos na secção 4.5. No entanto, tal aproximação não satisfaz a lei da conservação do volume, uma vez que u^0 não é um campo solenoidal. Para obter uma aproximação compatível com a lei de conservação de volume, levamos também em consideração o termo u^1 na expansão do campo de velocidade.

Definamos uma solução aproximada $(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon)$ de (4.1) tal que

$$\begin{cases} \tilde{u}^\varepsilon(x) &= \varepsilon^2 u^0(x_1, y) + \varepsilon^3 u^1(x_1, y) \\ \tilde{p}^\varepsilon(x) &= p^0(x_1) + \varepsilon^2 p^2(x_1, y) \end{cases} \quad (5.36)$$

Temos $u_2^0 = 0$, $u_3^0 = 0$ e $u_1^1 = 0$, então o campo de velocidade $\tilde{u}$ é dado por

$$\tilde{u}^\varepsilon(x) = \left(\varepsilon^2 u_1^0(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}), \varepsilon^3 u_\alpha^1(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}) \right),$$

onde $u_\alpha^1 = (u_2^1, u_3^1)$.

O termo $\varepsilon^3 u_\alpha^1(x_1, y)$ funciona como um corrector para o termo u^0 , o que torna o campo de velocidade solenoidal, ou seja,

$$\operatorname{div} \tilde{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{em} \quad \Omega^\varepsilon. \quad (5.37)$$

De facto,

$$\operatorname{div} \tilde{u}^\varepsilon = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \operatorname{div}_y u^1 \right) = 0$$

em virtude da equação de continuidade (4.6b).

Os termos u^0 e u^1 satisfazem a condição de Dirichlet imposta sobre a fronteira Γ_D . Isto implica que o campo de velocidade $\tilde{u}$ é igual a zero na superfície lateral do tubo.

Vamos então derivar a equação do momento e a condição de fronteira de Neumann para os termos da aproximação com objectivo de formular o problema cuja solução coincide com a nossa aproximação. Para tal, começamos por derivar algumas expansões relacionadas com a aproximação em termos do parâmetro ε . Para o campo de velocidade $\tilde{u}^\varepsilon$, obtemos a seguinte expansão de $\nabla \tilde{u}$ em potências de ε :

$$\nabla \tilde{u} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2^1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2^1}{\partial y_2} \\ 0 & \frac{\partial u_3^1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_3^1}{\partial y_2} \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_2^1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_3^1}{\partial x_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

Vamos reescrever os coeficientes das potências de ε como matrizes blocos da forma

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix},$$

onde S_{11} é uma matriz 1×1 , S_{12} é uma matriz 1×2 , S_{21} é uma matriz 2×1 e S_{22} é uma matriz 2×2 . Com esta notação e denotando a matriz nula por zero, o gradiente de $\tilde{u}$ pode ser escrito na forma

$$\nabla \tilde{u} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & (\nabla_y u_1^0)^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \nabla_y u_\alpha^1 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial u_1^\alpha}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

A parte simétrica de $\nabla \tilde{u}$ é dada por

$$e(\nabla \tilde{u}) = \varepsilon \mathcal{B}_0 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_1 + \varepsilon^3 \mathcal{B}_2, \quad (5.40)$$

onde as funções matriciais $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são definidas por

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\nabla_y u_1^0)^T \\ \frac{1}{2}(\nabla_y u_1^0) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & e(\nabla_y u_\alpha^1) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha^1}{\partial x_1} \right)^T \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_\alpha^1}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix},$$

a parte simétrica de $\nabla_y u_\alpha^1$ é dada por

$$e(\nabla_y u_\alpha^1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2^1}{\partial y_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2^1}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2^1}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3^1}{\partial y_1} \right) & \frac{\partial u_3^1}{\partial y_2} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Aplicando o operador de divergência a ambos os membros da igualdade (5.40), obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} e(\nabla \tilde{u}) &= \varepsilon^0 \operatorname{div}_y \mathcal{B}_0 \\ &+ \varepsilon (\operatorname{div}_{x_1} \mathcal{B}_0 + \operatorname{div}_y \mathcal{B}_1) + \varepsilon^2 (\operatorname{div}_{x_1} \mathcal{B}_1 + \operatorname{div}_y \mathcal{B}_2) + \varepsilon^3 \operatorname{div}_{x_1} \mathcal{B}_2. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Vamos calcular os coeficientes de ε^0 , ε^1 , ε^2 e ε^3 de forma separada.

1. *Cálculo do coeficiente de ε^0 :*

$$\operatorname{div}_y \mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \operatorname{div}_y (\nabla_y u_1^0)^T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Delta_y u_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Cálculo do coeficiente de ε^1 :*

$$\operatorname{div}_{x_1} \mathcal{B}_0 + \operatorname{div}_y \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla_y u_1^0) + \frac{1}{2} \operatorname{div}_y (e(\nabla_y u_\alpha^1)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daqui, resulta que

$$\operatorname{div}_{x_1} \mathcal{B}_0 + \operatorname{div}_y \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \Delta_y u_\alpha^1 + \frac{1}{2} \nabla_y \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \operatorname{div}_y u^1 \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Devido a equação de continuidade (4.6b), obtemos

$$\operatorname{div}_{x_1} \mathcal{B}_0 + \operatorname{div}_y \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \Delta_y u_\alpha^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \Delta_y u_2^1 \\ \frac{1}{2} \Delta_y u_3^1 \end{pmatrix}.$$

3. *Cálculo do coeficiente de ε^2 :*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{x_1} \mathcal{B}_1 + \operatorname{div}_y \mathcal{B}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \operatorname{div}_y \left(\frac{\partial u_\alpha^1}{\partial x_1} \right)^T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \operatorname{div}_y u^1 \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mais uma vez, usando a equação de continuidade (4.6b), obtemos

$$\operatorname{div}_{x_1} \mathcal{B}_1 + \operatorname{div}_y \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. *Cálculo do coeficiente de ε^3 :*

$$\operatorname{div}_{x_1} \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \operatorname{div}_{x_1} \left(\frac{\partial u_\alpha^1}{\partial x_1} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial x_1^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}$$

Substituindo os resultados obtidos em (5.42) e de seguida multiplicando tudo por 2μ , obtemos

$$2\mu \operatorname{div}(e(\nabla \tilde{u})) = \varepsilon^0 \mathcal{M}_0 + \varepsilon^1 \mathcal{M}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{M}_2 + \varepsilon^3 \mathcal{M}_3, \quad (5.43)$$

onde $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ e $\mathcal{M}_3$ são definidos por

$$\mathcal{M}_0 = \begin{pmatrix} \mu \Delta_y u_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \Delta_y u_2^1 \\ \mu \Delta_y u_3^1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} \mu \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial x_1^2} \\ \mu \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos determinar a expansão do gradiente de pressão $\tilde{p}$ em termos de ε . Da definição da função $\tilde{p}$ e tendo em conta que a função p^0 não depende da variável y , segue que

$$\nabla \tilde{p} = \varepsilon^0 \nabla_{x_1} p^0 + \varepsilon \nabla_y p^2 + \varepsilon^2 \nabla_{x_1} p^2$$

As equações (4.17) e (5.12) mostram que

$$\nabla_{x_1} p^0 = \begin{pmatrix} \mu \Delta_y u_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_0, \quad \nabla_y p^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \Delta_y u_2^1 \\ \mu \Delta_y u_3^1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_1,$$

Da página 40, temos

$$\nabla_{x_1} p^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial p^2}{\partial x_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + \frac{dc}{dx_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$-\nabla \tilde{p} + 2\mu \operatorname{div} e(\nabla \tilde{u}) = \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} - \frac{dc}{dx_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}.$$

Uma análise semelhante para a condição de fronteira de tensão normal nos fornece:

$$\begin{aligned} (-\tilde{p}I + 2\mu e(\nabla \tilde{u}))\hat{n} &= -p^0 \hat{n} + \varepsilon 2\mu \mathcal{B}_0 \hat{n} + \varepsilon^2 (-p^2 I + 2\mu \mathcal{B}_1) \hat{n} + \varepsilon^3 2\mu \mathcal{B}_2 \hat{n} \\ &= \begin{pmatrix} -p_b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} \\ \mu \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} -p^2 + 2\mu \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \frac{\partial u_2^1}{\partial x_1} \\ \mu \frac{\partial u_2^1}{\partial x_1} \end{pmatrix} \\ &= -p_b \hat{n} + \varepsilon 2\mu \mathcal{B}_0 \hat{n} + \varepsilon^2 3\mu \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \hat{n} + \varepsilon^3 2\mu \mathcal{B}_2 \hat{n}. \end{aligned}$$

Resumindo os nossos cálculos, o par $(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon)$ satisfaz o seguinte problema de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-\tilde{p}^\varepsilon I + 2\mu e(\nabla \tilde{u}^\varepsilon)) &= \mathcal{M}^\varepsilon \quad \text{em } \Omega^\varepsilon \\ \operatorname{div} \tilde{u}^\varepsilon &= 0 \quad \text{em } \Omega^\varepsilon \\ \tilde{u}^\varepsilon &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D^\varepsilon \\ (-\tilde{p}^\varepsilon I + 2\mu e(\nabla \tilde{u}^\varepsilon))\hat{n} &= -p_b \hat{n} + \mathcal{B}^\varepsilon \quad \text{sobre } \Gamma_N^\varepsilon, \end{array} \right. \quad (5.44)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\varepsilon &\stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} - \frac{dc}{dx_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B}^\varepsilon &\stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} \\ \mu \frac{\partial u_1^0}{\partial y_2} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} -p^2 + 2\mu \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \frac{\partial u_2^1}{\partial x_1} \\ \mu \frac{\partial u_2^1}{\partial x_1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Capítulo 6

Resultados, conclusões e recomendações

6.1 Resultados

Neste trabalho estudamos o problema do fluxo de um fluido Newtoniano e incompressível em um tubo fino recto tridimensional de forma cilíndrica de secção transversal circular variável. O modelo matemático formulado, o sistema estacionário de Stokes colocado no domínio fino Ω^ε , nos proporcionou desafios interessantes durante o processo da construção da solução aproximada para o campo de velocidade u^ε e a pressão p^ε . Assumimos que a solução $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ do problema admite expansões assintóticas das formas

$$u^\varepsilon(x_1, x') = \varepsilon^2 u^0(x_1, y) + \varepsilon^3 u^1(x_1, y) + \dots$$

$$p^\varepsilon(x_1, x') = p^0(x_1, y) + \varepsilon p^1(x_1, y) + \dots$$

onde u^k e p^k são funções desconhecidas, com $y = \varepsilon^{-1}x'$. A construção da aproximação assintótica foi feita em três fases:

Na primeira fase, começamos por identificar algumas propriedades relacionadas com alguns termos das expansões assintóticas. Em seguida, aplicamos técnicas de análise matemática e da teoria de equações diferenciais para determinar as fórmulas explícitas dos termos de ordem zero (u^0, p^0) . Como resultado, encontramos:

$$p^0(x_1) = \frac{p_b(L) - p_b(0)}{\int_0^L r^4(\xi) d\xi} \int_0^{x_1} r^{-4}(\xi) d\xi + p_b(0)$$
$$u^0(x_1, y) = -\frac{1}{4\mu} (r^2(x_1) - |y|^2) \nabla_{x_1} p^0(x_1).$$

Aqui observamos que a relação de dependência entre o campo de velocidade e o gradiente da pressão é linear, ou seja, os termos de ordem zero satisfazem a lei de Poiseuille. Além disso, o termo u^0 satisfaz a condição de fronteira de Dirichlet, mas não conserva o volume. Então, avançamos para a segunda fase da construção da nossa aproximação, o cálculo do termo de

ordem um da velocidade e os termos de ordem um e dois da pressão de modo a obter uma aproximação mais precisa. Nesta fase, tivemos dois momentos distintos:

- **Momento 1**—cálculo da primeira componente do termo de ordem um da velocidade u_1^1 e o termo da pressão de ordem um p^1 .
- **Momento 2**—cálculo da segunda e terceira componentes do termo de ordem um da velocidade $(u_\alpha^1) = (u_2^1, u_3^1)$ e o termo de ordem dois da pressão p^2 .

No momento 1, usando argumentos similares aos do cálculo de (u_1^0, p^0) encontramos

$$(u_1^1, p^1) = (0, 0).$$

No momento 2, lidamos com um problema de Stokes não homogêneo, um problema cuja análise de solvabilidade foi bem interessante. Para resolver o problema, recorremos a um resultado importante de [30, Teorema 2.4] que estabelece uma condição de existência e unicidade da solução do problema de Stokes não homogêneo. Como resultado, encontramos:

$$\begin{aligned} u_2^1(x_1, y) &= -\frac{p_b(L) - p_b(0)}{4\mu \int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi} \left(\frac{r^2(x_1) - y_1^2 - y_2^2}{r^5(x_1)} \right) y_1 \frac{dr}{dx_1}(x_1) \\ u_3^1(x_1, y) &= -\frac{p_b(L) - p_b(0)}{4\mu \int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi} \left(\frac{r^2(x_1) - y_1^2 - y_2^2}{r^5(x_1)} \right) y_2 \frac{dr}{dx_1}(x_1) \\ p^2(x_1, y) &= -\mu \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}(x_1, y) \\ &\quad + a_1 \int_0^{x_1} r^{-4}(\xi) d\xi + \frac{p_b(L) - p_b(0)}{3 \int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi} \int_0^{x_1} \{[r'(\xi)]^2 + r(\xi)r''(\xi)\} r^{-4}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

onde

$$a_1 = -\frac{[p_b(L) - p_b(0)] \int_0^L \{[r'(\xi)]^2 + r(\xi)r''(\xi)\} r^{-4}(\xi) d\xi}{3 \left[\int_0^L r^{-4}(\xi) d\xi \right]^2}.$$

Finalmente, na terceira fase, definimos a aproximação assintótica como

$$\begin{cases} \tilde{u}^\varepsilon(x) &= \varepsilon^2 u^0(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}) + \varepsilon^3 u^1(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}) \\ \tilde{p}^\varepsilon(x) &= p^0(x_1) + \varepsilon^2 p^2(x_1, \frac{x'}{\varepsilon}). \end{cases}$$

6.2 Conclusões e recomendações

A aproximação $(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon)$ satisfaz o seguinte problema de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(-\tilde{p}^\varepsilon I + 2\mu e(\nabla \tilde{u}^\varepsilon)) &= \mathcal{M}^\varepsilon & \text{em } \Omega^\varepsilon \\ \operatorname{div} \tilde{u}^\varepsilon &= 0 & \text{em } \Omega^\varepsilon \\ \tilde{u}^\varepsilon &= 0 & \text{sobre } \Gamma_D^\varepsilon \\ (-\tilde{p}^\varepsilon I + 2\mu e(\nabla \tilde{u}^\varepsilon))\hat{n} &= -p_b\hat{n} + \mathcal{B}^\varepsilon & \text{sobre } \Gamma_N^\varepsilon, \end{array} \right.$$

Comparando o problema aproximado com o problema original (4.1) concluímos que a aproximação $(\tilde{u}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon)$ não satisfaz o problema original devido a presença dos termos $\mathcal{M}^\varepsilon$ e $\mathcal{B}^\varepsilon$. No entanto, uma vez que $\mathcal{M}^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ e $\mathcal{B}^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$ vemos que a aproximação é, de facto, uma solução assintótica de (4.1) no limite à medida que ε tende para zero. A nossa maior satisfação é que a aproximação obtida conserva o volume. Este resultado obtido é similar ao resultado obtido em [11], onde foi feito um estudo do fluxo de Stokes numa célula de Helen-Shaw generalizada confinada entre duas superfícies. Para justificar com rigor a validade da aproximação obtida, os autores utilizaram as estimativas de erros para o campo velocidade e pressão em termos das normas dos espaços H^1 e L_2 , respectivamente. Portanto, para os trabalhos futuros propomos:

1. Justificar de forma rigorosa as expansões assintóticas escolhidas. Em particular, gostaríamos de esclarecer as condições de fronteira aparentemente contraditórias obtidas pelo método de expansão assintótica. Esta análise pode exigir que as camadas limite em Γ_N sejam tomadas em consideração.
2. Estimar o erro da aproximação obtida. Isto pode ser feito considerando a formulação fraca de (4.1) e estimando os erros $\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon\|$ e $\|p^\varepsilon - \tilde{p}^\varepsilon\|$ em normas adequadas.
3. Elaborar um artigo com os resultados obtidos e publicá-lo em uma revista científica.

Bibliografia

- [1] D. J. Acheson. *Elementary fluid dynamics*, Oxford University Press, 1990.
- [2] Ch. Amrouche, P. Penel, and N. Seloula. Some remarks on the boundary conditions in the theory of Navier-Stokes equations. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 20(1):37-73, 2013.
- [3] G. K. Batchelor. *Introduction to Fluid Dynamic*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [4] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam-New-York-Oxford, 1978.
- [5] F. Boyer and P. Fabrie. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, Springer, 2013.
- [6] R. Brown, I. Mitrea, M. Mitrea, and M. Wright. Mixed boundary value problems for the Stokes system. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(3):1211-1230, 2010.
- [7] C.-H. Bruneau and P. Fabrie. New efficient boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equation: a well-posedness result. *Math. Model. Numer. Anal.*, 30(7):815-840, 1996.
- [8] D. Cioranescu and P. Donato. *An Introduction to Homogenization*, Clarendon Press, Oxford, 1999.
- [9] I. G. Curie. *Fundamental Mechanics of Fluid*, Third edition, Marcel Dekker, Inc. New York, 2003.
- [10] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, AMS, 2010.
- [11] J. Fabricius, S. Manjate, P. Wall. Error estimates for pressure-driven Hele-Shaw flow, *Quart. Appl. Math.*, 80(3):575-595, 2022.
- [12] J. Fabricius, E. Miroshnikova, A. Tsandzana, P. Wall. Pressure-driven flow in thin domains. *Asymptot. Anal.*, 116(1):1-26, 2020.
- [13] E. Guyon, J. Hulin, L. Petit, C. Mitescu. *Physical hydrodynamics*, second edition, Oxford university Press, 2015.

- [14] O. Ladyzhenskaya. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*, Second edition. Gordon and Breach, New York, 1969.
- [15] S. Marušić, E. Marušić-Paloka. Two-scale convergence for thin domains and its applications to some lower-dimensional models in fluid mechanics. *Asymptot. Anal.*, 23(1):23-57, 2000.
- [16] E. Marušić-Paloka. Rigorous justification of the Kirchhoff law for junction of thin pipes filled with viscous fluid. *Asymptot. Anal.*, 33(1):51-66, 2003
- [17] E. Marušić-Paloka. The effects of flexion and torsion for a fluid flow through a curved pipe, *Appl. Math. Opt.*, 44(3):245-272, 2001.
- [18] E. Miroshnikova. Pressure-driven flow in a thin pipe with rough boundary. *Z. Angew. Math. Phys.*, 71(1):1-20, 2020.
- [19] C.-L. M.H. Navier. Mémoire sur les du mouvement of fluids, *Mémoires de L'Académie Royale des Sciences de L'Institut de France*, (6):389-440, 1823.
- [20] R. L. Panton. *Incompressible flow*. Second edition. John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [21] I. Pažanin. Asymptotic behaviour of micropolar fluid flow through a curved pipe. *Acta Appl Math.*, 116(1):1-25, 2011.
- [22] I. Pažanin. Effective flow of a micropolar fluid through a thin or long pipe. *Math Probl Eng.*, 2011:18. ID127070, 2011.
- [23] J. Poiseuille. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres; I. Influence de la pression sur la quantité de liquide qui traverse les tubes de très petits diamètres. *C. R. Acad. Sci.*, 11:961-67, 1840.
- [24] J. Poiseuille. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres; II. influence de la longueur sur la quantatité de liquide qui traverse les tubes de très petits diamètres; III. influence du diamètre sur la quantatité de liquide qui traverse les tubes de très petits diamètres;. *C. R. Acad. Sci.*, 11:1041-1048, 1840.
- [25] O. Reynolds. On the theory of lubrication and its application to M Beauchamp Tower's experiments. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A117:157-234, 1886.
- [26] A.B. Saint-Venant. *Comptes Rendus Hebdomadaires de L'Académie des Sciences*, 1240, 1843.
- [27] S. SALSA. *Partial differential equations in Action from modelling to theory*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2010.
- [28] J. Serrin. *Mathematical Principles of Classic Fluid Mechanics*, Handbuch der Physik, Springer-Verlag, 1959.

- [29] G. G. Stokes. *On the internal of the friction motion and the equilibrium and motion of elastic solid*, Fellow of Pemboke college, 1845.
- [30] R. Temam. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*, AMS, 1984.
- [31] S. P. Sutura and R. Skalak. The history of poiseuille’s law. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25(1):1-20, 1993.
- [32] F. M. White. *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, 1991.